II-15　有限要素ペナルティ法のわれ目岩盤系解析への適用

○ 京都大学　学　寺脇正文
京都大学　正　古市　徹
京都大学　正　井上頼輝

1. はじめに

有害廃棄物等の保管の一つの方法として，岩盤内処理が考えられる。岩盤は有害廃棄物を隔離防護する役割を果たすが，岩盤にわれ目系が存在すれば，そこを移動経路として有害汚染物質が環境へ漏出することが危惧される。従来，われ目系の存在する岩盤における汚染物質輸送の解析は，単一われ目について考えられることが多い。[1),2),3)] その時，地下水流は岩盤へは浸透せず，われ目内を平均流速で流れる一次元流として解析される。本報では，われ目系と岩盤をそれぞれ透水係数によって特性づけ，汚染物質輸送を支配する流れ場を求めるために，動水勾配を必要としない有限要素ペナルティ法を新しく開発した。本方法により，二次元場において，われ目系と岩盤とを連立して解き，流れ場と物質輸送の数値計算およびわれ目系と岩盤との相互作用について検討する。

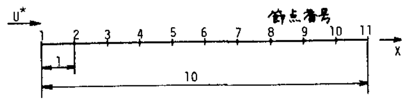

図1　解析領域（一次元）

2. ペナルティ法を用いた定式化

飽和地下水浸透流はダルシー則(1)式を仮定し連続式(2)式を制約条件として求められる。

$$\mathbf{u} = -K\nabla h \qquad (1)$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = 0 \qquad (2)$$

$\mathbf{u}$；流速ベクトル［LT^{-1}］
K：透水係数［LT^{-1}］
h；水位［L］

従来，流れ場を求めるには，(1)式を(2)式に代入した水位についてのポアソン方程式を解き，水位場を求めてから再び(1)式のダルシー則を解くという手法がとられている。この方法では水位についての境界条件が考慮され，水位の観測値がそのために用いられる。一方，ペナルティ法は有限要素法により以下のように定式化される。[4),5)] 重み関数をWとし，解析領域Ωで積分し，Greenの公式を用いると，式(1)，(2)は，

$$\int_\Omega W\cdot\mathbf{u}\,d\Omega - \int_\Omega K\nabla W\cdot h\,d\Omega = 0 \qquad (3)$$

$$\int_\Omega W\cdot(\nabla\cdot\mathbf{u})\,d\Omega = 0 \qquad (4)$$

ここで，小さな正の数εを導入し，(3)，(4)式に小さな摂動を加えると式(4)は次のようになる。

$$\int_\Omega W\cdot(\nabla\cdot\mathbf{u}_\varepsilon)\,d\Omega = -\varepsilon\int_\Omega W\cdot h_\varepsilon\,d\Omega \qquad (5)$$

εを十分に小さくしていくと(5)式の右辺は0に近づいていき，連続式(2)式が近似的に満たされ，$\mathbf{u}_\varepsilon \to \mathbf{u}$となることがわかる。(5)式は次のようにペナルティ関数表現しても等価である。

$$h_\varepsilon = -\lambda\nabla\cdot\mathbf{u}\ ,\ \lambda = 1/\varepsilon \qquad (6)$$

λ：ペナルティ

式(6)を式(3)を摂動した式に代入すると最終的に(7)式が得られる。

$$\int_\Omega W\cdot\mathbf{u}\,d\Omega + \lambda\int_\Omega K\cdot\nabla W\cdot(\nabla\cdot\mathbf{u}_\varepsilon)\,d\Omega = 0 \qquad (7)$$

(7)式をみると，ペナルティ関数を導入することにより，水位hを消去でき，流速$\mathbf{u}$のみで流れ場を取り扱うことができる。なお，添字εはεに依存するという意味である。

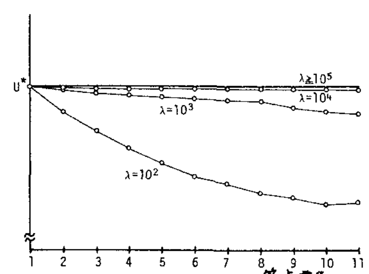

図2　λによるちがい

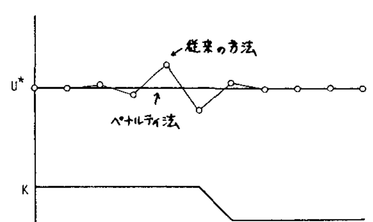

図3　手法の比較
（Kが不連続）

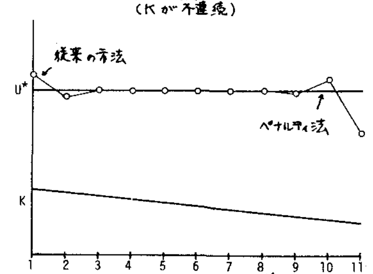

図4　手法の比較
（Kが線形に変化）

3. 一次元流れでの検証

ペナルティ法を用いた定式化の有効性を示すために，図1にあるような一次元流れについて考える。一次元流れについては連続式より $u=$ 一定なる解析解が求まり，これとペナルティ法による数値解を比較する。図2は透水係数Kを一定とし，λを変化させた時の数値解を示している。図2からλが大きくなるにつれて，数値解が解析解（$u=U^*$ (const)）に収束していくのがわかる。λの値が10^5以上では解析解とほぼ一致する。λが10^5以下の時は，連続の条件の近似度が悪く，λが小さい程数値解は解析解とかなりのずれを示す。（ただし，このλは透水係数，指定する流速U^*の値によって採用すべきλの下限値が異なる。）(1)-(3)式の系を本研究で示したようなペナルティ法を用いた定式化で近似的に解くことの正当性が，以上のことから推察できる。次に図3・4は，従来の方法とペナルティ法を比較したものである。図3は透水係数が不連続な場について，図4は透水係数が線型に変化する場についての両者の比較である。この時用いたλの値は10^{10}である。両図において，数値解の挙動は明らかにペナルティー法によるものが良く，従来の方法では図3で透水係数が不連続となる所で，図4で流出入端で，数値解がばらついているのがわかる。このことから，ペナルティ法の方が，従来の方法に比べて非常に精度良く流れ場を決定でき，有効であるといえる。また従来の方法が一度水位場を評価しなくては流れ場を決定できないのに対して，ペナルティ法は水位場を評価する必要がなく，流線を横切る断面において（一次元では領域内の一節点）流速を指定すれば直接流れ場を決定できるという特徴がある。

4. 数値計算例

図5に示すような二次元のわれ目系の存在する飽和岩盤内の定常流を想定しペナルティ法を適用する。われ目岩盤系の特性は透水係数によって決定されるとした。われ目系では$K=1.0$ (cm/hr)であり，岩盤では$K=10^{-4}$ (cm/hr)としている。$\lambda=10^4$を採用して計算した結果を図6に示す。図6からわれ目系内の流速分布は放物形になっており，連続性もよく保たれ，収支がよくとれていることがわかる。図7は図6での岩盤部分での流れ場を示している。図7の矢印のスケールは図6の10倍である。図7からわれ目系と岩盤との境界でごく小さな反流があるのがわかる。これはわれ目系の近傍では渦が生じているからと考えられる。この流れ場における汚染物質輸送問題を風上有限要素法を用いて評価しているが，その詳細については講演時に述べる。

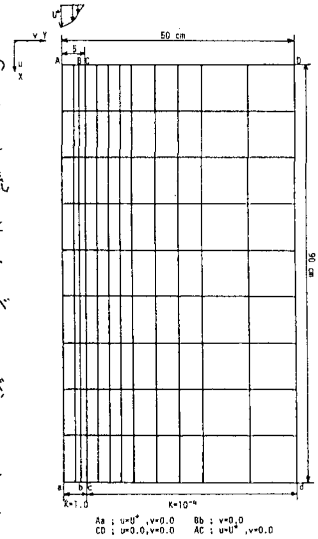

図5 解析領域（二次元）

5. 結論

岩盤飽和浸透流を解析するために，水位場を介さずに流れ場を直接評価できるペナルティ法を新しく開発し，一次元領域において検証し，その正当性と有効性を示した。また，ペナルティ法を二次元われ目岩盤系に適用し，われ目系と岩盤を連立して解くことにより，その流れ場を同時に決定できることを示した。

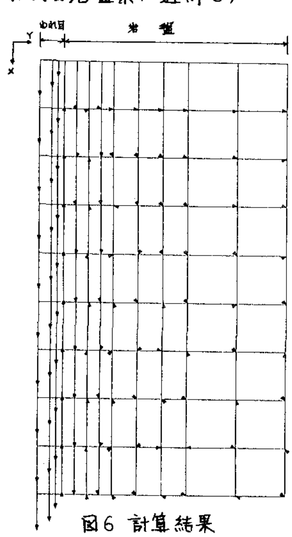

図6 計算結果

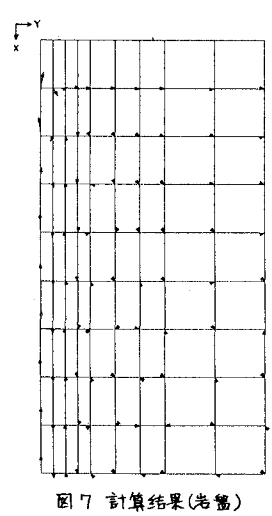

図7 計算結果（岩盤）

（参考文献）

1) G.E. Grisak, and J.F. Pickens ; Water. Resour. Res. vol 16. No.4. pp.719-730 (1980)

2) D.H. Tang ; Water. Resour. Res. vol 17, No.3, pp555-564 (1981)

3) J. Noorishad and M. Mehran ; Water. Resour. Res. vol.18, No.3 pp.588-596 (1982)

4) 菊地文雄 ; 数理科学 No 236 Feb. pp 7-13 (1983)

5) 原・平野・池内 ; 数理科学 No.236 Feb pp 14-20 (1983)