II-10 地下水流れ場の統計的構造と濃度分布形との関係について

京都大学大学院　学生員　米田　稔
京都大学工学部　正員　井上頼輝
京都大学工学部　正員　古市　徹

1．はじめに．　フィールドスケールでの地下水汚染解析では、帯水層を均質と仮定して移流分散方程式を解くことが多い。この結果得られる瞬間点源からの濃度分布は正規分布となる。しかし筆者らの研究[1]によると、透水量係数の空間的不均質性を確率論的に考慮して求めた濃度分布は、図1のように正の非対称分布となった。また、流速が有効な相関を持つ距離に比べ、物質の移動距離が十分長くなると、中心極限定理から濃度分布は正規分布になることはよく知られている。この性質を用いて間隙スケールでの流速変動による物質の分散をモデル化した理論は数多くある。[2] しかし本研究で扱う流速変動はフィールドスケールでの流速変動であるため流速の有効な相関距離が極めて長い可能性もあり、実際の物質移動予測において図1のように濃度分布が正規分布に成らない場合もあると考えられる。このため本報においては流速の統計的構造と濃度分布形との関係について解析し、濃度分布が正規分布とみなせる条件について考察する。

2．研究方法．　*Dagan*[3]は不均質かつ不確定な流れ場における分布の期待値が、(1)式の条件の下では近似的に(2)式で与えられることを示した。

$$D_{\mathrm{I}} t \left| \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x_1^2} \right| \ll f(x,t) \qquad D_{\mathrm{II}} t \left| \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x_2^2} \right| \ll f(x,t) \tag{1}$$

$$\langle C(x,t) \rangle = \frac{M}{n} f(x,t) \tag{2}$$

ここに $D_{\mathrm{I}}, D_{\mathrm{II}}$ はそれぞれ縦方向と横方向の分散係数、平均流下方向を x_1 方向としている。$f(x,t)$ は $t=0$ に原点を出発した粒子が移流項のみによって移動するとき、その粒子が時刻 t に座標 $x=(x_1, x_2)$ にある確率を表わし、$\langle C(x,t) \rangle$ は $t=0$ に原点に総量 M の物質が加えられたときの濃度分布 $C(x,t)$ の期待値を表わす。また n は間隙率である。本研究では次のようにして流れ場のモデル化を行い、モンテカルロ法を用いて $f(x,t)$ を近似的に求める。(1)解析の簡単化のため1次元について考える。(2)図2に示す半無限1次元領域を、流速が有効な相関を持つ長さ l の部分領域に分割し、各部分領域に流速を割り当てる。(3)各部分領域の流速は独立とし、流速に定常性と空間的エルゴード性を仮定する。(4)流速は対数正規分布すると仮定する。（この仮定は *Biggar et al.*[4] のフィールド調査の結果や筆者らの以前の研究結果[1]から妥当と考えられる。）(5)対数正規分布する乱数を用いて各部分領域に流速を割り当て、多数の流速場の標本を発生する。(6)それぞれの流速場の標本について t 時間後の粒子の位置 x を求める。x を求めるには図2で、まず t と l/v_1 を比較し、$t > l/v_1$ ならば $l/v_1 + l/v_2$ と t を比較する。このような比較を繰り返し、初めて $l/v_1 + l/v_2 + \cdots + l/v_n > t$ となる n を求め $\{t-(l/v_1 + l/v_2 + \cdots + l/v_{n-1})\}v_n$ に $(n-1)l$ を加えたものを x とする。こうして多数の標本から得

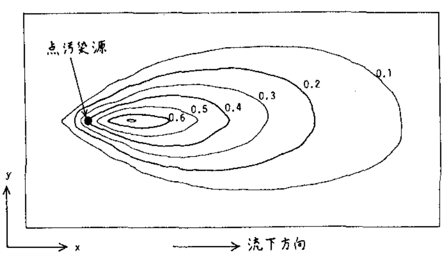

図1．瞬間点汚染源からの濃度分布

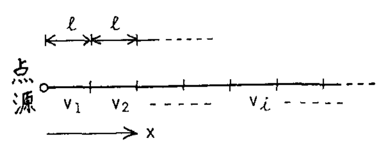

図2．解析領域と条件

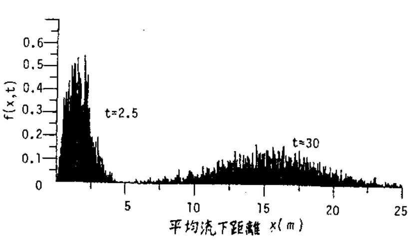

図3．濃度分布形と平均流下距離の関係

たxの頻度分布から$f(x,t)$を近似的に求める。本研究では標本数は1000個とした。

3. 結果と考察.　図3に、流速vの期待値$\langle v\rangle = 1.0$ (m/day)、vの標準偏差$\sigma_v = 1.0$ (m/day)、流速の有効な相関距離$l = 1$ (m)としたときの、2.で述べた方法で得られた$f(x,t)$の例を$t = 2.5$と30 (day)について示す。$f(x,t)$について、xの歪度と尖度を求めると、$\langle v\rangle, \sigma_v, l$の値に関係なく、$f(x,t)$は常に最初は鋭峯で、原点側に傾いた正の非対称分布となり、流下するにつれて正規分布に近づいていく傾向がみられた。また図3と同じ条件下で図4においては、物質が流下するにつれて流下距離xの分散(variance)が、流下時間tに正比例する傾向が示されている。これは分散(dispersion)の統計モデルにおいてよく知られたTaylorの理論に本モデルが従っていることを示している。図5には流下時間tと平均移動距離$\langle x\rangle$の関係を示している。今、v_{ef}を$v_{ef} = \langle x\rangle / t$として定義すると、図5で直線Aは$v_{ef}$が$v$の算術平均のときの、直線Bは$v_{ef}$が$v$の調和平均のときの$t$-$\langle x\rangle$関係を表わす。流下するにつれて$v_{ef}$が$v$の算術平均から調和平均に移行する傾向がみられる。これは流下距離xがlに比べて短いときは、粒子はまだ最初の部分領域の中にあるため、各標本での流下距離が$x = vt$で表わされ$\langle x\rangle = \langle v\rangle t$となる。一方、流下距離$x$が$l$に比べて長いときは$x \fallingdotseq nl$, $t = l/v_1 + l/v_2 + \cdots + l/v_n \fallingdotseq nl\langle \frac{1}{v}\rangle$ (nは十分大きい整数)とすると、$x \fallingdotseq \frac{1}{\langle 1/v\rangle} t$、したがって$\langle x\rangle = \frac{1}{\langle 1/v\rangle} \cdot t$となるためである。ここに$1/\langle 1/v\rangle$は$v$の調和平均である。

有意水準1%で正規分布検定を行い、濃度分布が正規分布とみなされるために必要な平均流下距離x_Nと、$\langle v\rangle, \sigma_v, l$の関係を示したものが図6,7である。図6では$\langle v\rangle$と$\sigma_v$の3つの組合せについて、$x_N$と$l$が正比例することを、図7では$l = 1$mの場合について$v$の変動係数$\sigma_v/\langle v\rangle$と$x_N$が正比例することを示している。本研究の条件下では、$x_N, \langle v\rangle, \sigma_v, l$の間に次式の関係が得られた。

$$\frac{\langle v\rangle}{\sigma_v} \cdot \frac{x_N}{l} \fallingdotseq 5 \qquad (3)$$

よって(3)式の左辺が5以下のとき、濃度分布は正の非対称分布、5以上のときは正規分布になると考えられる。

今後の検討課題として、2次元のさらに詳しいモデルについても、(3)式のような関係式が成立するかどうかを研究したいと考えている。

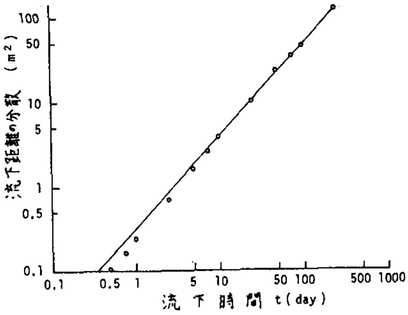

図4. 流下時間と流下距離の分散の関係

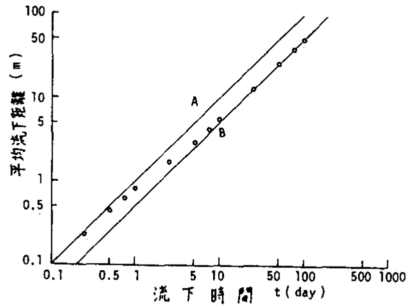

図5. 流下時間と平均流下距離の関係

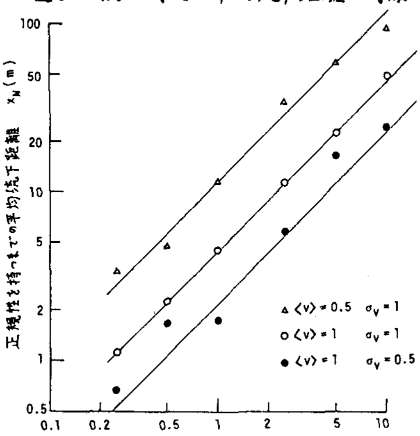

図6. lとx_Nとの関係

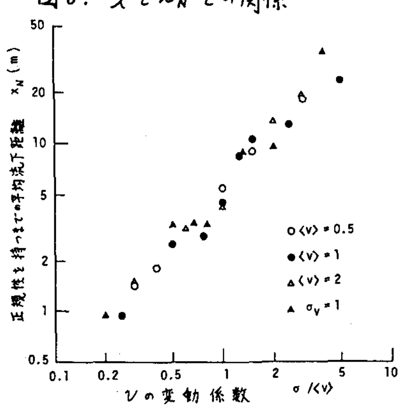

図7. vの変動係数とx_Nとの関係

「参考文献」

1). 米田,古市,井上；衛生工学研究論文集,第19巻, 1983

2). Bear, J. ; dynamics of fluids in porous media, American Elsevier, New York, 1972.

3). Dagan, G., water resour. resear., vol.18, NO.4, pp835-848, 1982

4). Biggar, et al., water resour. resear., vol.12, No.1, pp78-84, 1976