I-431　グリーン関数の離散化を用いた半無限弾性体上の円形基礎の振動に関する研究

埼玉大学　正会員　東原　紘道
東京電力　正会員　石井　敏雅　○

1. まえがき

地盤と構造物の相互作用効果を解明するためには，まず地盤上に基礎のみがある場合の振動特性を明らかにすることが必要である。原子力発電所のような剛性の高い構造物の場合には，剛体基礎の仮定のもとにこの問題について解析を行なうことが可能であり，多くの研究がなされている。[1),2)]しかし，近年，大型化の著しい円筒形貯油タンク等については，剛体の仮定は成り立たず，構造物の変形を考慮した解析を行なわねばならない。任意形状の基礎についてこの解析を理論的に貫徹するのはきわめて困難である。このため，解析の当初から有限分割＝選点法による離散化を用いた離散化がなされている。[3),4)]しかし，円形基礎についてはグリーン関数まで構成できることが知られている。[5)]本研究では，これを用いて，円形基礎の軸対称鉛直振動について解析を行なう。特に，従来高精度の解が得られている剛体基礎の計算によって，本手法の信頼性を検討する。

2. 解析手法

地盤を半無限弾性体と仮定し，円形基礎に軸対称な上下加振が作用する場合について考える。この場合の鉛直変位・鉛直応力分布については妹沢により一般解が求められている。[6)]この妹沢の一般解を用いると，円形基礎下面の地盤の鉛直変位$w(r)$と垂直応力$\sigma(r)$が次式によって直接対応づけられる[5)]。

$$w(r)=\frac{1}{\mu}\int_0^R W(r,s)\,\sigma(s)\,s\,ds \qquad (1)$$

ここに，

$$W(r,s)=k_\beta^2\left\{W_0(r,s)-\frac{2(1-\nu)}{\pi\cdot r}K\left(\frac{s}{r}\right)\right\} \qquad (2)$$

$$W_0(r,s)=\int_0^{k_\beta}H(k)\,\mathrm{H}_0(kr,ks)\,dk-\pi\frac{K\sqrt{K^2-k_\alpha^2}}{F'(K)}\mathrm{H}_0(Kr,Ks) \qquad (3)$$

$$H(k)=\begin{cases}\dfrac{k\sqrt{k_\alpha^2-k^2}}{(2k^2-k_\beta^2)+4k^2\sqrt{k_\alpha^2-k^2}\sqrt{k_\beta^2-k^2}} & 0\leqq k\leqq k_\alpha\\[2ex] \dfrac{4k^3\sqrt{k_\beta^2-k^2}\,(k^2-k_\alpha^2)}{(2k^2-k_\beta^2)+16k^4(k^2-k_\alpha^2)(k_\beta^2-k^2)} & k_\alpha<k\leqq k_\beta\end{cases} \qquad (4)$$

$$F(k)=(k^2+k_\beta^2)-4k^2\sqrt{k^2-k_\alpha^2}\sqrt{k^2-k_\beta^2}$$

$$\mathrm{H}_0(kr,ks)=\frac{1}{2}\left\{G_0(kr,ks)+J_0(kr)N_0(ks)+N_0(kr)J_0(ks)\right\}+iJ_0(kr)J_0(ks) \qquad (5)$$

$k_\alpha=\omega\sqrt{\dfrac{\rho}{\lambda+2\mu}}$，　$k_\beta=\omega\sqrt{\dfrac{\rho}{\mu}}$，　　K：関数Fの0点

ω：加振円振動数，λおよびμ：Lamb の定数，ν：ポアソン比，$J_0(x)$：0次の Bessel 関数，$K(\frac{s}{r})$：完全楕円積分

$G_0(kr,ks)$：$J_0(x)$に類似した性質をもつ関数で次式で与えられる。

$$G_0(kr,ks)=\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi/2}d\theta_1\int^{\pi/2}d\theta_2\,\sin|kr\sin\theta_1-ks\sin\theta_2| \qquad (6)$$

（1）式は，次のような特徴を持っている。

①円形基礎下の応力分布を仮定していない。

②円形基礎は剛体である必要はなく任意の変形をして差支えない。

③応力σと変位wの関係が，直接に表現されている。

④Lambの点加振解を近似的に重ね合わせる方法と比較して，積分表示されているために，高精度の計算が容易である。また，加振点と変位点が一致する場合，その点は特異点となるが，この特異点も一数学的に精密に処理できる。

以上のような特徴をもった（1）式を解くわけであるが，この式は，第1種Fredholm 積分方程式の形をとっている。第1種Fredholm積分方程式は数学的に種々の困難さを有しており，解析的に解き得ない。そこで，本研究では，（1）式を離散化して数値解析を行なう。

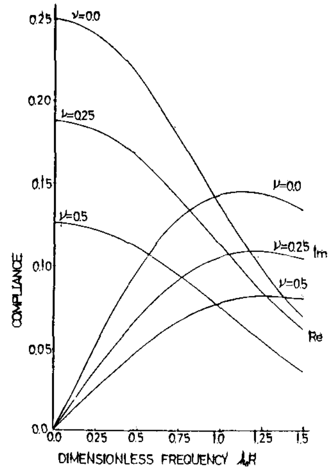
3．数値計算の結果

（1）式は，任意に変形可能な円形基礎に対して導びかれたものであるが，その特別な場合として剛体の場合も解くことができる。円形剛体基礎が半無限弾性体地盤上にある場合については，多くの研究結果が報告されているので，ここでは，これらの結果と，（1）式より求められる結果を比較して本方法の信頼性および計算能力を検討する。比較対象となるのは，円形剛体基礎に，軸対称な上下加振が作用する場合である。

（1）解の検証 ― 複素剛性

本手法において得られた複素剛性の計算結果(Fig 1)をLuco[1]の計算結果と比較してみるとよく一致する。

Fig 1

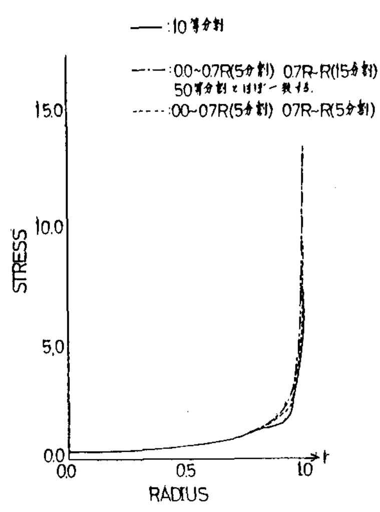


（2）解の検証 ― 応力分布

本手法において求められる応力分布について見ると，円形基礎の半径を10等分割の場合と50等分割の場合では，誤差が生じている。(Fig 2)不等分割を用いると，この誤差をなくし，また能率的な計算を行なうことができる。例えば，0.0~0.7Rの区間は5分割，0.7R~R 区間は15分割程度に分割すれば，50等分割に匹敵する精度が得られ，しかも計算時間が$\frac{1}{5}$ですむ。

本研究では，軸対称な鉛直加振について計算を行なっているが，水平振動，ロッキング振動についても(1)式の表示が可能である。これらの振動モード，さらには，弾性構造物の振動への応用については，後の機会に発表する予定である。

Fig 2



※参考文献

1) Luco,J.E. and R.A. Westmann:Dynamic Response of Circular Footings, Proc. ASCE,Vol.97,EM.5 1971

2) IAN A.Robertson:Forced Vertical Vibration of a Rigid Circular Disc on a Semi-Infinite Elastic Solid,Proceedings of the Cambridge Philosophical Society,Vol.Series A,1966

3)桜井春輔・北村泰時：剛基礎底面の複素剛性に関する一解析法，土木学会論文報告集第209号 1979

4)小林俊夫：Green函数の離散化手法を用いた建屋と地盤の動的相互作用の研究，日本建築学会論文報告集第302号 昭和56年4月

5)東原紘道・山田隆弘：半無限弾性体の軸対称ダイナミックコンプライアンス問題のGreen関数の研究，土木学会年次学術講演会 昭和57年8月

6)妹沢克惟：Further Studies on Rayleigh-Waves having Some Azimuthal Distribution（方位的分布をもつレーレー波の研究），東大地震研究所彙報，第6号 1928年 7月