# I-274　矩形キャビティ内流れの解析における境界条件について

東京工業大学　正　野村 卓史
東京工業大学　正　吉田 裕

## 1. はじめに

流れの数値解析において，解析の対象とする現象に対応した境界条件が明確に設定され得るかということは，個々の解法の特性を評価する上で重要な問題である。本報告は，非圧縮粘性流体の正方形キャビティ内流れの問題に対して流速と圧力を変数とする有限要素法による解法を適用した時に設定されている境界条件について考察し，問題点を指摘するものである。

## 2. 正方形キャビティ内流れの境界条件

正方形キャビティ内流れの問題は，図1に示す正方形領域ABCDの3辺を固定し，上辺を一様流速Uで運動させた時に領域内に循環流が形成されるというものである。単純な形状を有する非線形現象の格好の題材であるために，従来より差分法による数多くの解が発表され[1]，近年有限要素法による解析も多くなされている[2]。図1のような理想化された条件設定がされているために，上辺両隅の点C，Dが流速の特異点となること，および力の条件が与えられる境界がなく，圧力の規準を別途与えなければならないこと，という，境界条件を設定するに際して自明でない要因が含まれている。

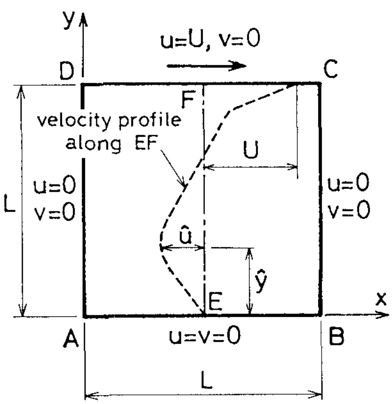



図1. 正方形キャビティ内流れの問題

流速と圧力を変数とする有限要素法によってこの問題を解析しているもののほとんどは，隅角点C，Dにおいて $\langle u,v \rangle = \langle U,0 \rangle$ の条件を与えている。図2に示したように，この条件は領域ABCDに対し流出，流入があることに相当する。そのため，境界ABCDAを1つの閉じた流線とするという本来の前提とは異なる条件設定となり，結果的に，与えられた流速Uに対し領域を循環する総流量が低減してしまうことになる。その度合を表わす1つの尺度として，領域の中央線EF上における x 方向流速成分のピーク値 $\hat{u}$ とその位置 $\hat{y}$ を考え，これをいくつかの論文中に示されている流速分布図より読取って，正規化し表1に示した。流出入量が多いほど $\hat{u}$ が小さく，$\hat{y}$ が大きくなる。表1中，①は流れ関数と渦度を変数とする差分解，②は流れ関数のみを変数とする有限要素解で，いずれも領域への流出入がないという条件を満足するもの

表1. 解析条件と解の比較（Re = 400）

| | investigators | û/U | ŷ/L | method | mesh | finite element | reference |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Burggraf | 0.30 | 0.30 | F.D.(ψ-ω) | 40 x 40 | —— | J. Fluid Mech. 1966 |
| 2 | Olson & Tuann | 0.29 | 0.29 | F.E.(ψ) | 8 x 8 | 18-dof triangular | Comp. & Fluids 1979 |
| 3 | Hughes, Taylor & Levy | 0.25 | 0.33 | F.E.(u-p) | 10 x 14 | 4-node bilinear | F.E. in Fluids 1978 |
| 4 | Hughes, Liu & Brooks | 0.35 | 0.32 | | 20 x 21 | | J. Comp. Phys. 1979 |
| 5 | | 0.20 | 0.34 | | 20 x 20 | | |
| 6 | Nakazawa, Pittman | 0.21 | 0.39 | | 20 x 20 | | F.E. in Fluids 1982 |
| 7 | & Zienkiewicz | 0.10 | 0.39 | | 10 x 10 | | |
| 8 | Gartling & Becker | 0.27 | 0.31 | | 5 x 7 | 9-node biquadratic | C.M.A.M.E. 1976 |
| 9 | Bercovier & Engelman | 0.25 | 0.29 | | 12 x 12 | | J. Comp. Phys. 1979 |
| 10 | Heinrich & Marshall | 0.31 | 0.30 | | 5 x 7 | | Comp. & Fluids 1981 |
| 11 | authors: case A | 0.23 | 0.30 | | 16 x 16 | linear triangular | 1983 |
| 12 | case B | 0.31 | 0.30 | | 16 x 16 | | |

であり，比較の基準とした。

表1の中で，③④⑤と⑥⑦は流速を線形補間し，したがって隅点Cでは図2(a)のような流出分布を与えていることに相当する計算を行っているが，要素分割が粗いほど$\hat{U}$の値が小さくなっている。特に④は⑤の要素分割に対し上辺CDに沿って細分割を加えたもので【図2(b)】，$\hat{U}$の値が両隅角部での流出入量に大きく依存していることが明白である。2次の補間関数を用いている⑧⑨⑩では，線形補間と場合と同程度の節点数であるにもかかわらず$\hat{U}$の値は向上している。これは図2(c)に示すように，流出と流入が共存しているために結果として流出入量が少ないことに相当するためと考えられる。特に⑩は，図2(d)に示すように流出入量がちょうどゼロとなるように中間節点をシフトさせている。以上のように隅角点C，Dで流速Uを与える境界条件を課した時は，領域への流出入があるために，得られる流速分布は要素分割，要素種類に強く影響される。また①，②で想定している境界条件とも相異している。

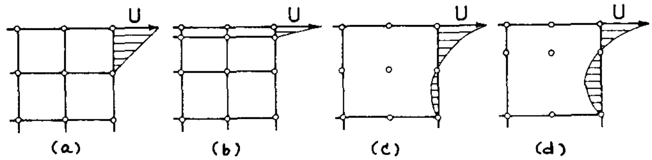
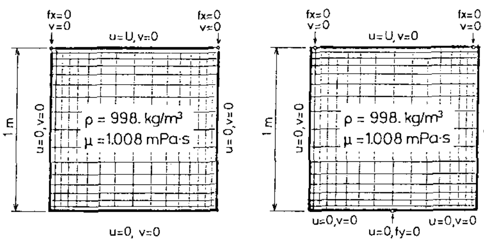


図2. 隅角部の流速条件

## 3. 境界条件の設定に関する解析

以上のような状況をふまえ，境界条件の設定に関する問題点を確認する目的で，著者らが構成した解法[3]に基づく解析を行った。流速は要素内線形補間，圧力は要素中心の変数として導入している。まず図3(a)に示すような境界条件を設定した。両隅点で解放されている流速成分は，計算の結果として連続条件よりいずれもUに等しく得られたが，領域に対して流出入があるために，表1⑪に示した$\hat{U}$の値は小さい。次に図3(b)に示すように，領域が完全に閉じたものとなるよう両隅点において流速ゼロの条件を与えた。この条件を与えた例が他にあまり報告されていないのは，隅角点と隣接する節点でゼロでない流速を強制するために計算が困難になるためと考えられる。そこでこれを緩和するために隣接節点の$x$成分流速を解放した。圧力の規準は他の計算例と対応するように，下辺の中点において辺に直交方向の力 $f_y=0$ を規定することで代用した。この条件は領域に対して流出入を許すものであるが，図4(a)の流速分布に明らかなように，解が連続条件を精度良く満足しているために結果として流速ゼロが得られている。したがって全体として閉じた流れが形成されているため，表1⑫の$\hat{U}$も妥当な値となっている。図4(b)の圧力分布は多少振動した解が得られているが，渦の中心で負圧，右上隅角部で正圧となっており，①や②で報告されている圧力分布と，数値的にもおおよそ対応している。



(a) CASE A (b) CASE B

図3. 設定した境界条件

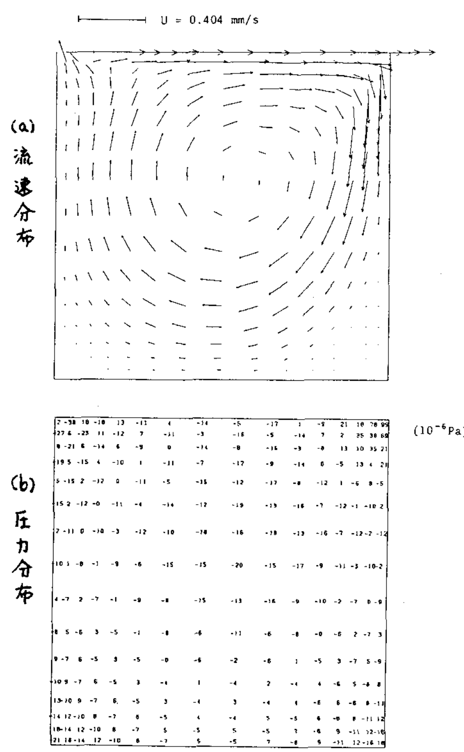


図4. CASE B ($R_e=400$)

参考文献)

(1) J.D.Bozeman & C.Dalton: J. of Comp. Phys., vol.12, 348-363, '73

(2) S.Y.Tuann & M.D.Olson: J. of Comp. Phys., vol.29, 1-19, '78

(3) 吉田 裕，野村卓史：土木学会論文報告集，No.326，'82