I-224　Dual Approachにおける計算アルゴリズムの検討

愛媛大学大学院　学生員　谷脇　一弘
愛媛大学工学部　正　員　大久保禎二

1．まえがき

双対理論により構造最適化を行う場合，双対変数の決定法およびその計算アルゴリズムにより，最適解を得るまでの計算能率および収束の状態が大きく影響される。そこで，本研究では，双対変数を決定する手法としてこれまでに提案されているニュートン法，線形連立方程式による方法，指数関数法について，それぞれの方法の特徴，計算アルゴリズム，計算能率，収束の状態などについて比較検討を行った結果について述べるものである。

2．双対変数の決定法

双対理論により構造最適化を行う場合，原変数Xの逆変数$Z(=1/X)$を用いた目的関数および線形近似された制約条件g_j ($=\bar{u}_j-\sum_{i=1}^{n}C_{ij}Z_i$，ここに$C_{ij}$，$\bar{u}_j$は定数，$n$は設計変数の数)より構成されるラグランジュ関数(双対関数ℓ)を導入し，まず双対変数λ_j ($j=1,\cdots m$，mはactiveな制約条件の数)を変数として，双対関数を最大化する。この双対関数を最大化する手法として，これまでにニュートン法，線形連立方程式による方法，指数関数法が提案されており，その計算アルゴリズムは図-1，図-2に示す2種類のアルゴリズムが考えられる。

2-1．ニュートン法

ニュートン法では，双対関数の最大化の方向Sを次式より計算し，

$$S=\left[H(\lambda_t)\right]^{-1}\nabla\ell(\lambda_t)$$

ここに，$H_{jk}=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{C_{ij}C_{ik}Z_i^3}{\rho_i l_i}$，$\nabla\ell=\frac{\partial\ell}{\partial\lambda_j}=\sum_{i=1}^{n}C_{ij}Z_i-\bar{u}_j$　(1)

l_iは要素iの長さ，ρ_iは原設計変数X_iの目的関数への寄与係数

式(2)により逐次双対関数を最大化するようにλを改良していく方法である。

$$\lambda^{(t+1)}=\lambda^{(t)}+\alpha^{(t)}S^{(t)} \qquad (2)$$

また，$\alpha^{(t)}$のとり得る最大値は，いずれのλの値をも負にしないように次式より規制される。

$$\alpha_{max}^{(t)}=\underset{S_i^{(t)}<0}{Min}\left|\frac{\lambda_i^{(t)}}{S_i^{(t)}}\right| \quad (i=1,\cdots m) \qquad (3)$$

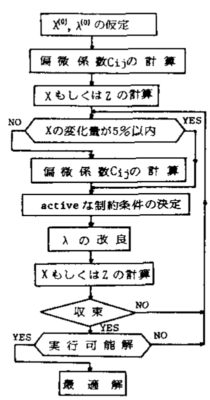


図-1 (CASE-1)

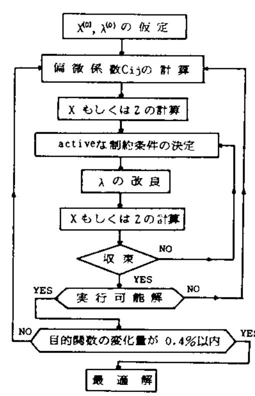


図-2 (CASE-2)

2-2．線形連立方程式による方法

双対関数の局所的最小解より得られるZとλの関係式より，Z_iに関するつぎの反復改良式を得る。

$$Z_i^{(t+1)}=Z_i^{(t)}-\frac{1}{\eta}\left(\frac{\sum_{j=1}^{m}\lambda_j C_{ij}Z_i^2}{\rho_i l_i}-1\right)_{(t)}Z_i^{(t)}$$，ここにηはZ_iの改良巾を規定するパラメータ　(4)

いま，activeな制約条件$g_j(Z)$の微小変化量を，式(4)を用いて変形し，また$Z+\Delta Z$におけるactiveな制約条件g_jにおいて，$g_j(Z^{(t)}+\Delta Z^{(t)})=\bar{u}_j^{(t+1)}-\sum_{i=1}^{n}C_{ij}Z_i^{(t+1)}=0$となることをも考慮して，つぎの双対変数$\lambda^{(t+1)}$に関する線形連立方程式が導入される。

$$\sum_{k=1}^{m}\lambda_k^{(t+1)}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{C_{ij}C_{ik}Z_i^3}{\rho_i l_i}\right)_{(t)}=\eta\left(\sum_{i=1}^{n}C_{ij}Z_i-\bar{u}_j\right)_{(t)}+\sum_{i=1}^{n}\left(C_{ij}Z_i\right)^{(t)} \qquad (5)$$

上式のλに関する線形連立方程式を解くことにより，$Z^{(t)}$における双対関数を最大とするλが決定され，これを式(4)に代入し，$Z^{(t+1)}$を求め，新たな双対関数を導入し，$Z^{(t+1)}$に対するλを再び(5)式より求める手順をくり返すことにより最適なλおよびZを求める。

2-3　指数関数法

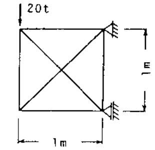
最適解においてactiveな制約条件は，$g_j=\bar{u}_j-\sum_{i=1}^{n}C_{ij}Z_i=0$となるので，この関係より，

$$\bar{u}_j=\sum_{i=1}^{n}C_{ij}Z_i \qquad (6)$$

となり，この両辺を$\bar{u}_j$で除し，その両辺にλ_jを乗じ，一般式に変形すると，つぎのλに関する反復改良式を得る。

$$\lambda_j^{(t+1)} = \lambda_j^{(t)} \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} C_{ij} Z_i}{\bar{u}_j} \right)^r \quad j=1,\cdots m$$ ，ここに，rはλ_jの改良巾を規定する定数パラメータ (7)

この方法によれば，最適解においてinactiveな制約条件は$g_k = \bar{u}_k - \sum_{i=1}^{n} C_{ij} Z_i > 0$ すなわち，$\left(\sum_{i=1}^{n} C_{ij} Z_i / \bar{u}_j\right) < 1$となり，式(7)において$r>1$であるので(7)式により$\lambda_j$をくり返し改良することにより，inactiveな制約条件に対するλ_jは0に近づき，activeな制約条件に対しては$\left(\sum_{i=1}^{n} C_{ij} Z_i / \bar{u}_j\right) \fallingdotseq 1$となり，一定値に収束する。



$E = 2100000\ \mathrm{kg/cm^2}$
$\sigma_{ta} = 1400\ \mathrm{kg/cm^2}$, $\rho = 1.0\ \mathrm{kg/cm^3}$
$\sigma_{ca} = 1300\ \mathrm{kg/cm^2}$

図-3 6部材トラス

3. 計算例および考察

上述の3つの方法により，種々のトラスの最適設計を行ったが，そのいくつかの例を表-1,2,3,図-4,5に示す。設計条件としては，

目的関数 $W(Z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\rho_i l_i}{Z_i} \Rightarrow min$，制約条件 $\begin{cases} g_i = \sigma_{ai} - \sigma_i \geq 0 \ (i=1,\cdots n) \\ g_\delta = \delta_a - \delta_{max} \geq 0 \end{cases}$

を考慮している。これらの計算例を比較することにより，つぎのことが明らかとなった。

表-1 ニュートン法を各アルゴリズムに適用した場合の最適化過程（6部材）

		CASE-1	CASE-2
δ_a= 0.27cm	N.SENS.CAL	8	4
	TVOL(cm³)	5936.6	5941.1
δ_a= 0.25cm	N.SENS.CAL	8	4
	TVOL(cm³)	6097.4	6094.1
δ_a= 0.23cm	N.SENS.CAL	10	3
	TVOL(cm³)	6625.6	6605.9

N.SENS.CAL=NUMBER OF SENSITIVITIES CALCULATION
TVOL=TOTAL VOLUME

1). case-1の計算アルゴリズムにより最適解を決定する場合，λの収束過程はλおよびXの初期値により大きく影響され，一般に多くのC_{ij}の反復計算を必要とする。一方，case-2のアルゴリズムでは1つのC_{ij}に対して数回の反復計算を行うため，時にはC_{ij}の精度が問題となるが，実際には，Xは最適解の方向へ改良され，C_{ij}の計算回数はcase-1の場合の半分以下に減少し，能率的なアルゴリズムとなる。 2). 線形連立方程式による方法では，最低1個以上の制約条件がactiveとなることが必要であるが，これは線形近似の制約条件式より変数Zをscalingすることにより全く単純に決定することができる。また，この方法では双対変数の初期値を仮定する必要のないことが大きな長所である。これに対して，ニュートン法および指数関数法では初期値を仮定する必要があり，いずれの方法もλの初期値により収束状況は大きく影響される。 3). 線形連立方程式による方法では，最適解を得るためのC_{ij}の計算回数は，摂動パラメータηの値により大きく影響され，表-2のη=3.0の場合に示すようにηの値が不適当な場合には，最適解とは異った解に収束する場合があり注意を要する。また，指数関数法では，C_{ij}の計算量はパラメータrの値にそれほど敏感ではなく広範囲のrの値をとり得る。これに対して，ニュートン法では摂動パラメータを設定する必要がない。このような摂動パラメータの決定という点からいえば，ニュートン法>指数関数法>線形連立方程式による方法の順序でアルゴリズムの信頼性が評価できる。 4). 計算アルゴリズムの複雑さの点からみれば，指数関数法が最も単純であり，ニュートン法が最も複雑となる。 5). 最適解を得るために必要とする反復回数および計算量は，ニュートン法<指数関数法<線形連立方程式による方法の順序となる。 以上の考察より，Dual Approachにおける双対変数の決定法として，case-2のアルゴリズムにニュートン法を用いた場合が，最も信頼性のある能率的な方法となる。

表-2 種々のηに対する線形連立方程式による方法の最適化過程（6部材）

	parameta η	η=1.0	η=2.0	η=3.0	
δ_a= 0.27cm	N.SENS.CAL	16	9	4	σ
	TVOL(cm³)	5951.3	5974.4	7007.4	
δ_a= 0.25cm	N.SENS.CAL	11	7	4	σ,δ
	TVOL(cm³)	6095.9	6096.4	7007.4	
δ_a= 0.23cm	N.SENS.CAL	3	4	4	δ
	TVOL(cm³)	6627.3	6625.3	7007.4	

N.SENS.CAL=NUMBER OF SENSITIVITIES CALCALATION
TVOL=TOTAL VOLUME

表-3 種々のrに対する指数関数法の最適化過程（6部材）

	parameta r	r=1	r=2	r=3	r=4	
δ_a= 0.27cm	N.SENS.CAL	4	3	4	6	σ
	TVOL (cm³)	5966.0	5927.1	5931.7	5936.7	
δ_a= 0.25cm	N.SENS.CAL	4	3	4	6	σ,δ
	TVOL (cm³)	6048.6	6046.6	6050.6	6051.3	
δ_a= 0.23cm	N.SENS.CAL	6	6	6	6	δ
	TVOL (cm³)	6574.6	6606.3	6604.1	6599.5	

N.SENS.CAL=NUMBER OF SENSITIVITIES CALCULATION (all $\lambda^{(0)}$=1.0)
TVOL=TOTAL VOLUME

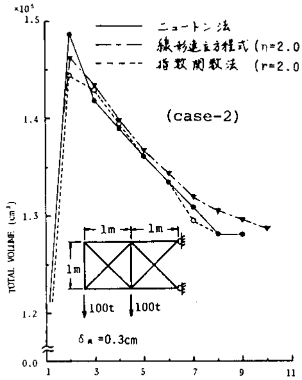


図-4 10部材トラスの収束状況（たわみの制約条件がactive）

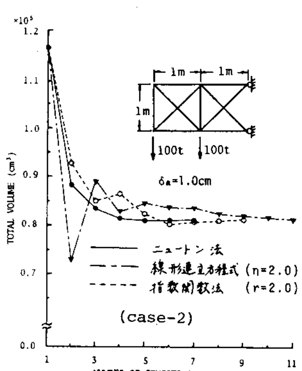


図-5 10部材トラスの収束状況（応力の制約条件がactive）

＜参考文献＞ N. S. Khot :"Algorithms Based on Optimality Criteria to Design Minimum Weight Structures" Engineering Optimization , 1981, vol. 5