

防衛大学校土木教室 正員 石川信隆

〇三原徹治

岡元北海

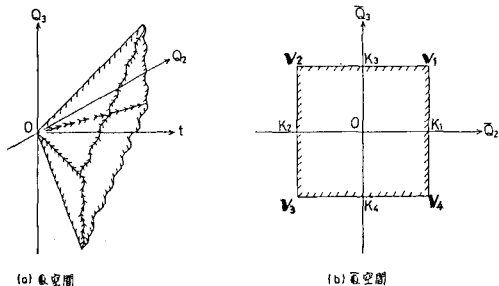
1. 結言 著者らは、先に有限要素に基づくマトリックス解析法と線形計画法(LP)を用いて骨組構造物を対象とした研究を行なったが、本研究はこれをさらに板・シェルなどの連続体構造の最適塑性設計へ拡張するためにまず第1段階として平面応力構造の最適塑性設計法(最小重量設計法)を開発したものである。

従来、平面応力構造に関してはMaier¹⁾およびWool²⁾の研究があるが、ここでは両者の長所を取り入れた新しいLP分割法を提案し、より簡便で効率的な設計法を確立するとともに、構造物の最適形状への応用を示すものである。なお本研究では、慣用の剛塑性理論に基づく仮定を用いるが、降伏条件として線形化したMisesの降伏式を用い、分布荷重は等価な集中荷重に置換できるものとする。

2. 設計基本式とLP分割法の適用 まず、平面応力構造を三角形要素に分割したうえで、設計基本式を静的定理を用いてMaier¹⁾と同じく断面力レベルで式(1)のようにLP問題として定式化した。ここに、式(1a)は構造全体の重量が最小となることを示し、式(1b)は構造全体のつり合い条件を、また式(1c)は線形化したMisesの降伏式を用いたときの構造全体の降伏条件をそれぞれ表わしている。ただし、 t_i = i 要素の要素厚； Q_i = i 要素の作用節点力ベクトル； F =外力ベクトル； α_0 =終局荷重係数； Q_i = i 要素の面積； C =適合マトリックス； K_i = i 要素の線形化降伏条件の原点から降伏面までの距離を示すベクトル； $N_i^T = n_i^T x_i$ ； n_i = i 要素の線形化降伏面における外向き単位法線マトリックス； x_i = i 要素の応力ベクトル σ_i と作用節点力ベクトル Q_i を結ぶつける等価変換マトリックス($\frac{1}{2}t_i \sigma_i = x_i Q_i$)； m =要素数。すなわち、式(1)は静的許容な応力状態、つまり安全側の応力状態を満足する中で最も重量を軽くする設計が最適設計であることを示している。

さて、式(1)をそのままLPを用いて解く(Maier¹⁾の解法)と極めて膨大なマトリックス容量を必要とし、大規模構造物や精度向上のための分割数を増大させることが困難となる。この欠点を是正するためWool²⁾は、基本式を応力レベルで非線形問題(NLP)として定式化して分割原理を適用した。しかしその解法はNLPであるため複雑なアルゴリズムとなっている。そこで本研究では、LP独自の長所つまり解の保証と効率性を失うことなくLPの分割原理を適用して計算容量の縮小化を試みた。ここで、分割原理の適用に際し、子問題(Sub problem)の制約が有界な凸集合を形成しなければならないが、式(1c)の制約は例えば図1(a)のように有界でない凸集合となっている。そこで、 $\bar{Q}_i = Q_i / t_i$ という新しい変数を用いて式(2)のようにその制約領域を有界な凸集合(図1(b)参照)に変換した。よって、領域内部の点 $\bar{Q}_i$ は式(3)のように端点座標ベクトル Q_j の凸1

既知数:	$C_i^T, a_i, \alpha_0 F, N_i, K_i$	
未知数:	Q_i, t_i	
目的関数:	$Z = \sum_{i=1}^m a_i t_i \rightarrow \min.$	(1a)
制約条件:	$\ominus \sum_{i=1}^m C_i^T Q_i = \alpha_0 F$	(1b)
	$\oplus N_i^T Q_i - \frac{1}{2} K_i t_i \leq 0 (i=1, 2, \dots, m)$	(1c)
	$t_i \geq 0 (i=1, 2, \dots, m)$	(1d)
	$N_i^T \bar{Q}_i \leq \frac{1}{2} K_i (i=1, 2, \dots, m)$	(2)
ただし:	$Q_i = Q_j / t_i$	
	$\bar{Q}_i = \sum_{j=1}^v \lambda_{ij} V_{ij}$	(3a)
	$\sum_{j=1}^v \lambda_{ij} = 1$	(3b)
	$\lambda_{ij} \geq 0 (j=1, 2, \dots, v)$	(3c)
既知数:	$C_i^T, a_i, \alpha_0 F, V_{ij}$	
未知数:	μ_{ij}	
目的関数:	$Z = \sum_{i=1}^m a_i (\sum_{j=1}^v \mu_{ij}) \rightarrow \min.$	(4a)
制約条件:	$\sum_{i=1}^m C_i^T (\sum_{j=1}^v \mu_{ij} V_{ij}) = \alpha_0 F$	(4b)
	$\mu_{ij} \geq 0 (i=1, 2, \dots, m, j=1, 2, \dots, v)$	(4c)
ただし:	$\mu_{ij} = t_i \lambda_{ij}$	(4d)
	$\sum_{j=1}^v \mu_{ij} = t_i \sum_{j=1}^v \lambda_{ij} = t_i$	(4e)
既知数:	u, C_i^T, N_{ij}, K_{ij}	
未知数:	$\bar{Q}_i$	
目的関数:	$Z_i = u^T C_i^T \bar{Q}_i \rightarrow \max.$	(5a)
制約条件:	$N_{ij}^T \bar{Q}_i \leq \frac{1}{2} K_{ij} (j=1, 2, \dots, v)$	(5b)

図-1 Q空間から $\bar{Q}$ 空間への変換

次結合で表わされることになる。ただし、 V_i = i 要素の Q_i 空間における降伏凸多面体の端点座標ベクトル； λ_{ij} = i 要素の凸1次結合を示す係数； v = i 要素の降伏凸多面体の端点の数。よって式(3)を式(1)に代入すると式(4)のように降伏条件を含んだ新しい親問題型式(Master problem)の基本式を得る。式(4)では V_i を既知数として未知数 Q_i を求め、これと式(4d)(4e)を用いて λ_{ij} および Q_i が算定される。しかし、 V_i をすべてデータとして与えることは要素数の増大に伴い膨大な量となり、その中には最適解を得るために不必要な Q_i も含まれている。そこで必要な Q_i のみを自動的に求め、しかも式(4)よりさらに計算容量を縮小した親子問題の繰返し計算法を導入した。このときの子問題は式(5)のようになり、これを解くと Q_i が得られ、これが i 要素につき1個の必要な Q_i ($=Q_{ij}$)を与えることになり、これを式(4)に逐次代入していくことにより最適解が得られる。以上の計算フローチャートを示すに図-2のようになる。ただし、 B_n =親問題(式(4))の n 回目の基底逆行列； $\tilde{B}_n = \begin{bmatrix} 1 & U \\ 0 & B_n \end{bmatrix}$ ； U =親問題(式(4))の双対変数 $\tilde{E}_n$ =掃出列 q_k による $(n+1)$ 回目の拡張された掃出逆行列； q_k =基底変数 k に対応する目的関数の係数ベクトル。

3. 数値計算例 (1)解の検証例：図-3に示す等分布荷重を受ける平面応力構造の最適塑性設計を行なうと、分割数と全重量の関係が図-4のように得られる。本法はMaier²⁾とWoo³⁾との中間の値となる。これはWoo³⁾が降伏条件を曲線のまま用い、またMaier²⁾は設計変数の数を要素数の $\frac{1}{2}$ にとったためと思われる。また分割数の増大に伴い重量も増加しているのは、分布荷重を集中荷重に置換する量が増大するためと思われる。なお、計算容量は式(1)に比し僅か3%にまで縮小化される($m=72$)。 (2)形状最適化の例：図-5のように水平集中荷重が作用する場合の最適塑性設計を行なった。得られた結果より要素厚比 r_i (=要素厚/平均要素厚)について対称性を考慮して適当な基準以上の要素厚比をもつ要素を必要空間とすると、図-6のように門型ラーメンのような形状(図-6(a))なら壁(図-6(b))までの構造形状が得られる。

4. 結言 (1)本研究で開発したLP分割法は、既往の解^{2,3)}とほぼ合致し、本法の妥当性を確認した。 (2)本法によれば、構造形式が与えられたときの最適断面寸法が容易に得られ、これより最適形状を得ることができる。 (3)本法は断面力レベルで定式化しているため、連続体自身はもちろん、骨組-連続体の一体構造への応用も便利である。

参考文献 1)石川ら、辺体骨組構造の最適塑性設計に関する一考察、土論 277号、pp.45-57, 1978.11. 2)Maier et al., A Finite Element Approach to Optimal Design of Plastic Structures in Plane Stress, I.J. Numerical Methods in Engineering, Vol.4, pp. 255-273, 1972. 3)Woo et al., Decomposition in Optimal Plastic Design of Structures, I.J. Solids Structures, Vol.17, pp. 39-56, 1981. 4)小野勝彦、骨組と連続体の最適設計法、日科技連、pp.130-150, 1976.

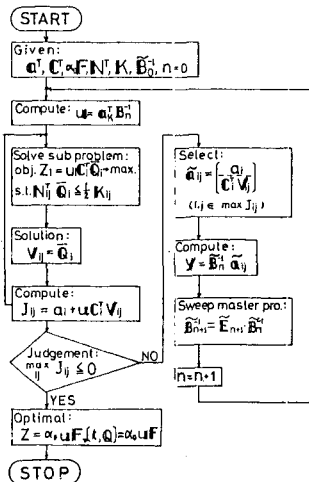


図-2 計算フローチャート

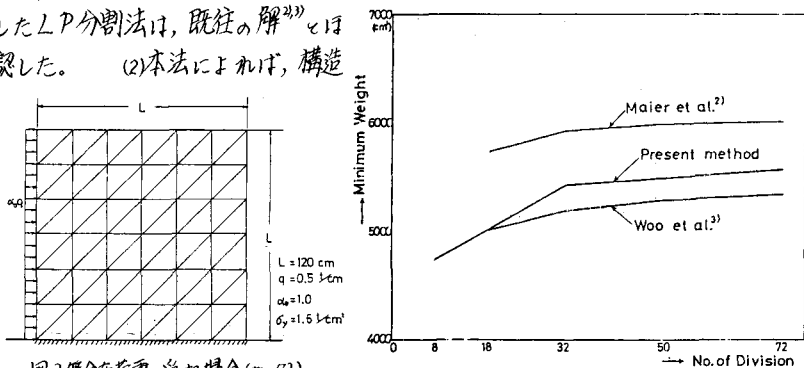


図-3 等分布荷重を受ける場合($m=72$)

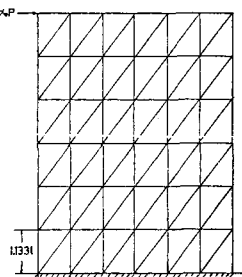


図-4 集中荷重を受ける場合

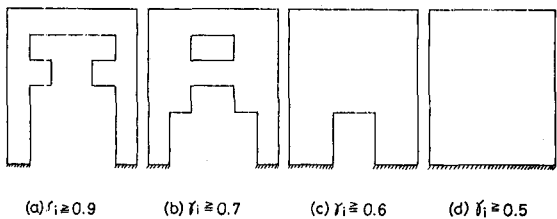


図-5 最適化形状