I-214　　　　最大荷重設計と最小重量設計の等価性と効率性

東京大学　正員　長谷川彰夫
大成建設　正員　坂下　克之
東京大学　正員　西野　文雄

1．まえがき　構造物の最適化の方法としては従来“適用荷重一定のもとで総重量を最小”にする最小重量設計が中心であった。ここでは、計算効率が最小重量設計よりも優れていることが予測されながらも、その実用例、最小重量設計との比較計算例等がないことから、広く用いられるに至っていない“総重量一定のもとで適用可能荷重を最大”にする最大荷重設計について、最小重量設計との等価性、計算効率の比較を、理論的、数値実験的に検討する。

2．最大計画問題と最小計画問題　与えられた実関数 $f(X)$、$g(X)$ に対して、次の一対の問題

問題①：　$g(X)\leq\alpha$ のもとで、$f(X)$ を最大化
問題②：　$f(X)\geq\beta$ のもとで、$g(X)$ を最小化
（ここにα、βは定数、Xは一般にm次元ベクトルとする）

を考える。問題①において、αの有限な定義域をA、ある固定された $\alpha\in A$ に対し $f(X)$ の最大値を与える解の集合を $\{X_\alpha\}$、その $f(X)$ の最大値を γ_α、αが領域Aを動くとき、γ_α のとり得る領域をBとする。また問題②において、βの有限な定義域をC、ある固定されたβに対し、$g(X)$ の最小値を与える解の集合を $\{X_\beta\}$、その $g(X)$ の最小値を γ_β、βが領域Cを動くとき、γ_β のとり得る領域をDとする。ここで、問題①に対して、次の条件(1)～(3)を設ける。

条件(1)：$\forall\alpha\in A$ に対して、問題①の解は存在する。
条件(2)；問題①において、$\forall X_\alpha\in\{X_\alpha\}$ に対し、$g(X_\alpha)=\alpha$
条件(3)：問題②のβの定義域C＝問題①の $f(X)$ の最大値の領域B

条件(2)はαと γ_α が1対1に対応することと等価であり、さらにこのとき γ_α はαの単調増加関数となる。条件(1)～(3)が成り立つことによって、次に示す問題①と問題②の等価性定理(0)～(3)が成立する。

定理(0)：問題②において、$\beta=\gamma_\alpha$ としたとき、$\{X_\beta\}=\{X_\alpha\}$、$\gamma_\beta=\alpha$
定理(1)：$\forall\beta\in C$ に対し、問題②の解は存在する。
定理(2)：問題②において、$\forall X_\beta\in\{X_\beta\}$ に対し、$f(X_\beta)=\beta$
定理(3)：問題①のαの定義域A＝問題②の $g(X)$ の最小値の領域D

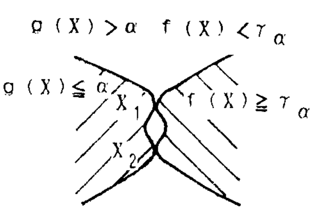

Fig.1 定理(0) の説明
$(\{X_\alpha\}=\{X_1,X_2\})$

証明）　定理(0)：空間Xの2つの領域　$\{X\mid g(X)\leq\alpha\}$，$\{X\mid f(X)\geq\gamma_\alpha\}$ は、$\{X_\alpha\}$ においてのみ共有点をもつ。なぜなら、他に共通点 X'_α があるとすると、$g(X'_\alpha)\leq\alpha$、$f(X'_\alpha)\geq\gamma_\alpha$ となり、$\{X_\alpha\}$ が問題①の解であることに反するからである。このことと、条件(2)により、$g(X_\alpha)=\alpha$ であることから、$\beta=\gamma_\alpha$ とした場合の問題②の解は $\{X_\alpha\}$ であり、$g(X)$ の最小値はαである。（Fig.1 参照）

定理(1)：条件(3)より、任意のβは問題①のあるαに対する $f(X)$ の最大値となっているから、$\beta=\gamma_\alpha$ とおけば、定理(0)により、解 $\{X_\alpha\}$、最小値αを得る。
定理(2)：定理(0)により、$\beta=\gamma_\alpha$ のとき、$f(X_\beta)=f(X_\alpha)=\gamma_\alpha=\beta$
定理(3)：定理(0)、(1)により、$(\alpha,\{X_\alpha\},\gamma_\alpha)$、$(\gamma_\beta,\{X_\beta\},\beta)$ は完全に同じ集合を構成することがわかる。従って、D＝Aは明らかである。

3．最大荷重設計と最小重量設計　構造物の制約条件は、設計事項 j（＝1～n）に対して、幾何変数X、適用荷重Pを変数として、$A_j(X)\cdot P\leq C_j(X)$ …(1) と表わされる。[1] ここに、$A_j(X)\cdot P$ は構造物の挙動、$C_j(X)$ は制限値を表わす。$P_{min}(X)\equiv\min_j(C_j(X)/A_j(X))$ —(2) を定義すると、式(1)は $P_{min}(X)\geq P$ …(3) のように、1つの不等式で表わされる。構造物の総重量を

W（X）とすると、最大荷重設計（MLD）最小重量設計（MWD）はそれぞれ次のように定式化できる。

MLD：W（X）＝w　のもとで　P_{min}（X）を最大化

MWD：P_{min}（X）≧p　のもとで　W（X）を最小化　　（w，pは定数）

ここで、MLDの『W（X）＝wのもとで』を『W（X）≦wのもとで』とすると、MLD，MWDはそれぞれ問題①、問題②に対応する形となる。MLDの、与えられたwに対する解の集合を｛X_w｝．P_{min}（X）の最大値をP_wとする。　両者の解が一致するためには、条件(1)～(3) に対応する次の条件(1)'～(3)'が成り立てばよい。

条件(1)'：　$\forall w>0$　に対して、MLDの解は存在する。

条件(2)'：　MLDにおいて、$\forall X_w \in \{X_w\}$　に対し、W（X_w）＝w

条件(3)'：　MWDの荷重Pの定義域｛P｝＝MLDの最大適用荷重P_wの領域｛P_w｝

条件(2)'は総重量w以下でMLDを行なう場合、最大適用荷重を与える総重量はwである　というものである。これが成り立つものとすれば、MLDを『W（X）＝w　のもとで』としても、『W（X）≦wのもとで』の場合と同じ解を与え、しかも条件(1)'(3)'が成り立てば、MWDとの解の一致が結論づけられる。条件(1)'～(3)'は実際の構造設計で認めてよい条件と考えられるので、MLDとMWDの解が一致することが保証される。MLDはMWDの『P_{min}（X）≧p』のような不等式制約条件がなく、しかも『W（X）＝w』より変数を１つ消去できるので、計算効率がよいことが予測される。

4．解の一致性と効率性に関する数値実験　Fig.2 に示す不静定ばりについて、断面積A_1～A_5の最適化を行なう。計算は次に示す無次元量を用いて行なう。即ち、$\overline{A}_i=A_i/L^2$，$\overline{P}=P/\sigma_a L^2$，$\overline{W}=\frac{1}{4}\overline{A}_1+\frac{1}{2}\overline{A}_2+\frac{1}{2}\overline{A}_3+\frac{1}{2}\overline{A}_4+\frac{1}{4}\overline{A}_5$ とする。ここにσ_aは制限応力、$\overline{W}$は無次元化した総重量である。モーメントによる応力制約のみを考慮し、断面２次モーメント、断面係数等は、$\overline{A}_i$の関数として一意的に決める。収束判定条件を同じにし、MLD、MWDを行なった結果をTable 1に示す。O．Sは最適解、C．Tは計算時間、（a）の$\overline{w}$は総重量、$\overline{P}$は最大適用荷重、（b）の$\overline{p}$は適用荷重、$\overline{W}$は最小総重量である。このように、MLDで得られた最大適用荷重$\overline{P}$をMWDの適用荷重$\overline{p}$とすると両者の解は目的関数および幾何変数ともに一致する。計算時間はMWDの方がMLDより２倍以上長く要している。さらに複雑な数値実験例においても、初期値の設定による最適幾何変数の若干の相違は見られるものの、最大適用荷重量にはほぼ完全な等価性が確認され、同一数値計算条件下での所要計算時間の点でも、MLDがMWDより（２～５）倍の効率性をもつことがわかった。初期値による最適幾何変数の相違は、変数Xに関する解の一意性を仮定する必要がなかったので、等価性の比較では問題にならない。

5．結語　構造設計では一般に認め得る条件のもとで、最大荷重設計と最小重量設計の等価性を数学的に証明した。さらに、数値実験により、最大荷重設計が最小重量設計に比較して、計算効率の点ではるかに優れていることを明らかにした。

参考文献１）長谷川彰夫、小桜義隆、松浦聖：　最大荷重設計による２軸対称プレートガーダーの最適化、土木学会論文報告集、第３１０号、１９８１．６．

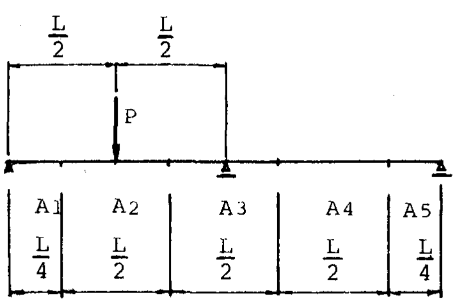

Fig.2 Beam for Numerical Experiment

Table 1. Numerical Experiment

(a) M.L.D($\overline{w}$=2.0)

	O.S
$\overline{A}_1$	1.2954
$\overline{A}_2$	2.0565
$\overline{A}_3$	1.2954
$\overline{A}_4$	0.0003
$\overline{A}_5$	0.0000
$\overline{P}$=11.284	
C.T=4 s	

(b) M.W.D($\overline{p}$=$\overline{P}$=11.28)

	O.S
$\overline{A}_1$	1.2951
$\overline{A}_2$	2.0559
$\overline{A}_3$	1.2951
$\overline{A}_4$	0.0000
$\overline{A}_5$	0.0000
$\overline{W}$=1.999	
C.T=10 s	