

京都大学工学部

小林 昭一

京都大学工学部

田村 武

京都大学大学院

平松 祐之

1. はじめに 制約条件の中に変位に関するものが含まれるとき、最小重量設計は一般に非線形計画問題となる。線形計画法の場合と比べて、その(強)双対定理は特殊な条件のもとでしか成立しない。しかし、双対定理が満たされるとき、双対問題を直接扱えば独立変数の個数を減ずることや、最適設計時における最小重量の下界値を求めること、あるいは制約条件に関する感度分析ができること等の利点がある。双対問題に対して Templeman¹⁾、大久保²⁾の研究がすでにあり、いくつかの特殊なアルゴリズムを提案している。本報告では、1つの基本的な立場より双対定理の枠組をふりかえ、今後、もっとも簡単なトラスの最小重量設計に双対定理をあてはめてその有効性を検証する。

2. 双対定理³⁾ (1)で定義される最適化問題を考える。これは(2)のLagrangean $L(x, \lambda)$ に対する $P = \min_x \{ \max_{\lambda} L(x, \lambda) \}$ を求めることと等価であることが容易にわかる。これを以下、主問題と呼ぶ。一方、 $D = \max_{\lambda} \{ \min_x L(x, \lambda) \}$ を求めることを双対問題と定義する。このとき、独立変数は λ であり、制約条件は $\lambda \geq 0$ である。一般に $D \leq P$ がいえる(弱双対定理)ことより、主問題の内容にかかわらず形式的に双対問題を作れば、 $\lambda \geq 0$ を満足する任意の解より直ちに主問題の下界値が求まる。それでは、どのような条件を課せば $D = P$ がいえるかを考える。Max min, min Max 問題で両者が等しくなるためにはLagrangeanが鞍点をもつこと、つまり(3)が成立するような $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ が存在することが必要十分である。いま、 $\bar{x}$ が主問題の最適解であらとする。

$f(x)$ と $g_i(x)$ の微分可能性(仮定I)と(4)に示すGuignardの制約想定(仮定II)を設けると、Kuhn-Tuckerの定理(5)が成立する。ところが $f(x)$, $g_i(x)$ がすべて凸とすると(仮定III) (5)₁は $L(x, \lambda)$ の x に関する大域的な最小値であることを示していること等よりKuhn-Tuckerの定理から $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ が $L(x, \lambda)$ の鞍点であることがわかる。よって 仮定I, II, III が満足されれば主問題の最小値と双対問題の最大値は一致し、いわゆる強双対定理が成立する。なお、仮定IIは一般に検証が複雑であるので、実用上はそれよりも強いSlaterの制約想定(仮定II', (6))を用いることが多い。ただしこの場合は、仮定Iを用いることなく、つまりKuhn-Tuckerの定理を通さずに $P = D$ を示すことができる。以上のことをFig. 1のようにまとめることができる。もしも仮定I, II(II'), III が成り立つなら、

Fig. 1の4つの命題はすべて等価である。なお、これらの仮定のどれかが成り立たない場合でも無論 $D \leq P$ は成り立つので、もっと精

$$f(x) \longrightarrow \min (x \in R^n)$$

$$\text{subject to } g_i(x) \leq 0 \quad (i=1, \dots, m) \quad (1)$$

$$L(x, \lambda) = \begin{cases} f(x) + \sum \lambda_i g_i(x) & (\lambda_i \geq 0) \\ -\infty & (\lambda_i \leq 0) \end{cases} \quad (2)$$

$$L(\bar{x}, \lambda) \leq L(\bar{x}, \bar{\lambda}) \leq L(x, \bar{\lambda}) \quad (3)$$

$$C(\bar{x}) \subset \text{co } T(\bar{x}) \quad (4)$$

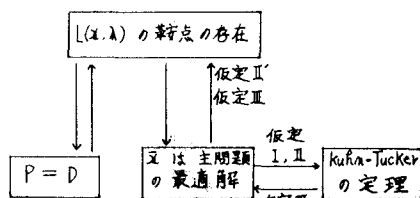
$$\begin{cases} C(\bar{x}): \text{線形化錐} \\ \text{co } T(\bar{x}): \text{双対錐 } T(\bar{x}) \text{ の凸包} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{\lambda} \geq 0 \\ \nabla f(\bar{x}) + \sum \bar{\lambda}_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0 \end{cases} \quad (5)_1$$

$$\bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = 0, \quad g_i(\bar{x}) \leq 0 \quad (5)_2$$

$$\begin{cases} g_i(x): \text{凸関数} \\ g_i(x_0) < 0 \text{ なる } x_0 \text{ が存在} \end{cases} \quad (6)$$

Fig. 1



確には(7)であることを示すことができる。

3. 具体的な設計例として Fig-2 のような簡単なトラスの設計を考える。変数 A は各部材断面積とした力制約と変位制約のもとで最適化を考える。定式化すれば(8) のようになる。明らかに $A \geq 0$ のもとで $F(A), G_i(A)$ はすべて微分可能(仮定I)であり、さらに単一の集中荷重のみを考えその作用点の節点変位を制限するならば、 F, G がすべて凸となる。(仮定II) これで問題は凸計画問題となり Slater の制約想定(仮定III) が簡単に示される。この結果2.で述べたように $L(A, \lambda)$ の鞍点の存在が確約され、主・双対問題の解析が可能となる。
 $P = \max_A \{ \min_{\lambda} L(A, \lambda) \}$ は線形目的関数、非線形制約の問題であり、その解法として支持超平面法を用いる。これは実行可能領域を支持超平面で線形近似した領域で解を求めるため最適解は実際の可能領域のわずかに外側に存在する。そこで、この解が可能領域内になるように移動させ、これを主問題の解 P とする。

また双対問題 $D = \max_{\lambda} \{ \min_A L(A, \lambda) \}$ は非線形目的関数、制約条件 $\lambda \geq 0$ の問題であり、ここでは縮小勾配法をその解法に用いる。基本方針は $L(A, \lambda)$ を各断面積 A_i に関し(9)を求め、 A_i を λ の非線形関数にし、これをもとに $\omega(\lambda) = L(\lambda, A)$ に変換し、縮小勾配法で $\omega(\lambda)$ を最大化していく。この結果、得られる最適解を D とする。双対定理より $P=D$ となるはずであるが、解法中に多くの近似式を用いた影響で、求めた解は必ずしも鞍点となっていない。したがって2つの問題の解は実行可能領域内にある限り $D \leq P$ となる。しかし P と D の差がわずかであれば、求めた解が鞍点の近傍にあると十分に言える。このように双対定理の存在によ、最適設計の信頼度が増すことになる。以下表-1 に Fig-2 で示したトラスの具体的な計算例を示しておく。

4. 以上、双対定理の最小重量設計への有効性を述べるため凸計画問題に限ってきた。しかし実際には構造物が不静定などのような関数の凸性が崩れる場合が出てくる。こうなると今まで有効であった支持超平面法によ、主問題を解くことができなくなってしまう双対問題のみになってしまう。したが、求めた解 D が真の最適解に対しどの程度精度かを判定する上限値がないため解 D に多少の不安が残ることになる。今後の課題は、この凸性の崩れる非線形計画をどう処理するかであるが、これは次の機会に譲ることとする。

*参考文献 1) Templeman, A DUAL APPROACH TO OPTIMUM TRUSS DESIGN
 2) 大久保 慎二・坂本良文, 土木学会講演概要集 I-286(1981)
 3) 福島 雅夫, 「非線形最適化の理論」, 産業図書 (1980)
 4) スズ本 茂, 「最適化問題の基礎」, 数学ライブラリー, 5 (1979)
 5) 刀根 策, 「数理計画」, 基礎の数学 4 (1978)

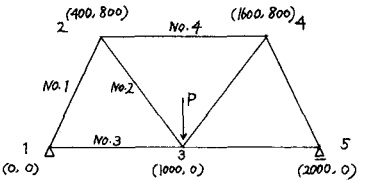
$$D = \min_{\lambda} \phi(\lambda) \quad (7)$$

$$\phi(\lambda) = \min_{\lambda} f(\lambda) \text{ subject to } g_i(\lambda) \leq u_i$$

$$\phi(\lambda) = \max_{\lambda} \{ h(\lambda) \mid h(\lambda) \text{ is } h(\lambda) \leq \phi(\lambda) \}$$

$\lambda \in R^n$ を満たす任意の線形関数

Fig-2



$$\begin{aligned} F(A) &= \sum_{i=1}^N \rho_i L_i A_i \rightarrow \min \\ \text{subject to } G_i(A) &= \left\{ \begin{aligned} &\sum_{m=1}^M \left(\frac{F_{xm} U_{xm} L_m}{E \delta_m} \right) \frac{1}{A_m} - 1 \leq 0 \quad (\text{変位}) \\ &\frac{A_n}{A_m} - 1 \leq 0 \quad (\text{太力}) \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (8)$$

*注
 参考
 照

$$L(A, \lambda) = \begin{cases} F(A) + \sum_{i=1}^N \lambda_i G_i(A) & (\lambda_i \geq 0) \\ -\infty & (\lambda_i \neq 0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial L(A, \lambda)}{\partial A_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (9)$$

表-1

	(cm ²) MIN SIZE	PRIMAL (cm ²) AREA	DUAL (cm ²) AREA	(kg/cm ²) ALLOWABLE STRESS
No.1	41.926	42.18	43.479	160
No.2	46.875	51.471	48.611	160
No.3	18.75	19.067	19.444	160
No.4	46.875	47.152	48.611	160
WEIGHT		1911.786	1905.55	

設定条件 トラスは左右対称
 $E = 1500000 \text{ kg/cm}^2$ DENSITY = 0.007 kg/cm^3
 $P(\text{LOAD}) = 12000 \text{ (kg)}$
 DISPLACEMENT CONSTRAINT
 POINT 3 0.36 (cm)

*注 N:部材数 M:変位制約数
 E :ヤング率 ρ :密度 δ_m :節点 m の許容変位
 F_{xm} :荷重 P_x による部材 m の節点力
 U_{xm} :節点 m に δ_m 方向の変位を与える単位荷重による部材 m の節点力