I-212　任意の相関を有する不規則分布荷重を受けるはりの解析

長崎大学工学部　正員　岡林　隆敏
長崎県庁　正員　浦川　剛志

1．はじめに　信頼性理論の進展に伴って、種々の不確定要因を考慮した構造解析の研究が進められている。構造物の動的解析では、不規則振動論による手法が確立している。静的解析において、分布荷重を確率過程でモデル化すると、動的解析と同様な取扱いができる。ルジャニーツイン[1]は、風荷重を不規則分布荷重とした解析を行なっている。高岡等[2]は、道路橋の活荷重を確率過程でモデル化し、道路橋の信頼性を検討している。静的な問題は、動的な問題が初期値問題になるのに対して、境界値問題になるためにいくつかの固有の問題が発生する。従って、解析は専ら解析的手法(Green関数の積分)に限られており、複雑な構造物また一般的な外力に適用するには制約があった。著者は、不規則境界値問題の数値解析の手法を、外力が白色雑音過程の場合について報告した[3][4]。本報告は、任意の相関を有する不規則分布荷重によるはりの静的応答解析の手法を研究したものである。

2．はり－荷重系の状態空間表示

図-1のように、分布荷重が作用するはり要素においてx点のたわみ$w(x)$、たわみ角$\phi(x)$、曲げモーメント$M(x)$およびせん断力$Q(x)$の変化は、状態変数

$$\mathbb{Y}(x)^T=\{w(x)\ \phi(x)\ M(x)\ Q(x)\}\ \text{------------}(1)$$

を用いて、状態空間で次のように表すことができる。

$$\left.\begin{array}{l} d\mathbb{Y}(x)/dx=\mathbb{A}_Y\mathbb{Y}(x)+\mathbb{F}_Y(x)\quad(0\le x\le \ell)\\ \text{境界条件}\ :\ \mathbb{Y}(0)=\mathbb{Y}_0,\ \mathbb{Y}(\ell)=\mathbb{Y}_\ell \end{array}\right\}\text{------}(2)$$

荷重系モデルの構成：不規則分布荷重を正規性定常確率過程$r(x)$と、その分散の空間的変化を表す確定関数$g(x)$の積で表わされる非定常確率過程でモデル化する。

$$q(x)=r(x)\,g(x)\qquad\text{-----------}(3)$$

実測により、パワースペクトル密度$S_r(\omega)$または自己相関関数$R_r(\lambda)$が得られた場合、その定常過程は、次のような白色雑音過程を入力とする線形形の定常解過程で近似的に表現することができる。本研究では、これを荷重系と呼ぶ

$$\left.\begin{array}{l} d\mathbb{Z}(x)/dx=\mathbb{A}_Z\mathbb{Z}(x)+\mathbb{N}_Z(x)\quad(-\infty\le x\le \ell)\\ r(x)=\mathbb{C}\,\mathbb{Z}(x)\\ \text{境界条件}\ :\ \mathbb{Z}(0)=\mathbb{Z}_0,\ \mathbb{Z}(\ell)=\mathbb{Z}_\ell \end{array}\right\}\text{------}(4)$$

はり－荷重系の方程式　：　次のような状態変数

$$\mathbb{X}(x)^T=\{\mathbb{Y}(x)^T\ \mathbb{Z}(x)^T\}\qquad\text{-----------}(5)$$

を用いて構成する。

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d}{dx}\mathbb{X}(x)=\mathbb{A}_X(x)\mathbb{X}(x)+\mathbb{N}_X(x)\quad(0\le x\le \ell)\\ \text{境界条件}\ :\ \mathbb{X}(\ell)=\mathbb{X}_\ell,\ \mathbb{X}(0)=\mathbb{X}_0 \end{array}\right\}\text{-----}(6)$$

ここに、$\mathbb{N}_X(x)$は平均値が0で、共分散が次式で与えられ

$$E[\mathbb{N}_X(x_1)\mathbb{N}_X(x_2)^T]=\mathbb{Q}_X(x_1)\delta(x_1-x_2)\qquad\text{--------}(7)$$

る白色雑音過程ベクトルである。

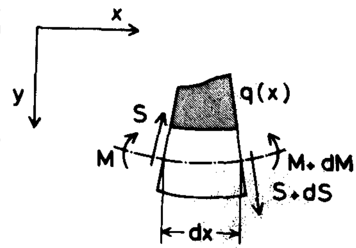

図-1　はり要素

3．境界条件の表現

はりの左端は、回転支点、固定支点および自由端に対して、それぞれ$\{\phi_0\ Q_0\}^T$、$\{M_0\ Q_0\}^T$、$\{w_0\ \phi_0\}^T$の自由度がある。これを$\tilde{\mathbb{Y}}_0$で表すと、左端境界条件は左端境界マトリックス[5]$\mathbb{B}_Y$を用いて、次式となる。

$$\mathbb{Y}_0=\mathbb{B}_Y\tilde{\mathbb{Y}}_0\qquad\text{------------}(8)$$

はり－荷重系に対して、次のような左端境界条件と境界マトリックスを定義する。

$$\left.\begin{array}{l} \mathbb{X}_0=\mathbb{B}_X\tilde{\mathbb{X}}_0\\ \mathbb{X}_0^T=\{\mathbb{Y}_0^T\ \mathbb{Z}_0^T\},\ \tilde{\mathbb{X}}_0=\{\tilde{\mathbb{Y}}_0^T\ \mathbb{Z}_0^T\}\\ \mathbb{B}_X=\begin{bmatrix}\mathbb{B}_Y & \mathbb{O}_{2n}\\ \mathbb{O}_{n2} & \mathbb{I}_{nn}\end{bmatrix} \end{array}\right\}\text{-----------}(9)$$

ここに、$\mathbb{O}_{k\ell}$はk列ℓ行の0マトリックス、$\mathbb{I}_{kk}$は$(k\times k)$の単位マトリックスを表す。

はりの左端では、移動、固定、自由端に対して、$\{w_\ell\ M_\ell\}^T$，$\{w_\ell\ \phi_\ell\}^T$，$\{M_\ell\ Q_\ell\}^T$は0となる。これらを$\tilde{\mathbb{Y}}_\ell$で表すと、右端の境界条件は、右端境界マトリックス$\mathbb{B}'_Y$[5]を用いて、次のようになる。

$$\mathbb{B}'_Y\mathbb{Y}_\ell=\tilde{\mathbb{Y}}_\ell=\mathbb{O}\qquad\text{--------------}(10)$$

はり－荷重系について、次のような境界マトリックス

を定義する。

$$\left.\begin{aligned}&\mathbb{B}'_x \mathbb{X}_\ell = \widetilde{\mathbb{X}}_\ell \\ &\mathbb{X}_\ell = \begin{bmatrix}\mathbb{Y}_\ell \\ \mathbb{Z}_\ell\end{bmatrix},\quad \widetilde{\mathbb{X}}_\ell = \begin{bmatrix}\mathbb{O}_{21} \\ \mathbb{Z}_\ell\end{bmatrix} \\ &\mathbb{B}'_x = \begin{bmatrix}\mathbb{B}'_Y & \mathbb{O}_{2n} \\ \mathbb{O}_{4n} & \mathbb{I}_{nn}\end{bmatrix}\end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots (11)$$

はりの共分散応答 $\mathbb{R}_Y(x)$ は、$\mathbb{R}_x(x)$ の要素として得ることができる。

4．不規則応答解析

不規則応答として、平均値回りの変動に着目する。応答 $\mathbb{X}(x)$ の解は、次式で与えられる。

$$\mathbb{X}(x) = \Phi_x(x,0)\mathbb{X}_0 + \int_0^x \Phi_x(x,\lambda)\mathbb{N}_x(\lambda)\,d\lambda \quad \cdots\cdots\cdots (12)$$

応答の共分散 $\mathbb{R}_x(x) = E[\mathbb{X}(x)\mathbb{X}(x)^T]$ は、次のように分割できる。

$$\mathbb{R}_x(x) = \begin{bmatrix} E[\mathbb{Y}(x)\,\mathbb{Y}(x)^T] & E[\mathbb{Y}(x)\,\mathbb{Z}(x)^T] \\ E[\mathbb{Z}(x)\,\mathbb{Y}(x)^T] & E[\mathbb{Z}(x)\,\mathbb{Z}(x)^T] \end{bmatrix}$$

a）はりー荷重系と荷重系の共分散方程式

はりー荷重系の共分散方程式

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dx}\mathbb{R}_x(x) = \mathbb{A}_x(x)\mathbb{R}_x(x) + \mathbb{R}_x(x)\mathbb{A}_x(x)^T + \Phi_x(x,0)E[\mathbb{X}_0\mathbb{N}_x(x)^T] \\ &\qquad + E[\mathbb{N}_x(x)\mathbb{X}_0^T]\Phi_x(x,0)^T + \mathbb{Q}_x(x) \quad (0 \le x \le \ell) \\ &\text{境界条件}:\ \mathbb{R}_x(0) = \mathbb{R}_{x_0},\ \mathbb{R}_x(\ell) = \mathbb{R}_{x_\ell}\end{aligned}\right\} \cdots\cdots (13)$$

荷重系の共分散方程式は、初期値問題であることと、定常応答より、次の連立方程式となる。$\mathbb{Q}_z$ は、$\mathbb{N}_z(x)$ の強度を表すマトリックス。

$$\mathbb{A}_z\mathbb{R}_z + \mathbb{R}_z\mathbb{A}_z^T + \mathbb{Q}_z = \mathbb{O} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (14)$$

b）境界条件と外力の相関関数　$E[\mathbb{X}_0\mathbb{N}_x(x)^T] = E[\mathbb{X}_0\mathbb{N}_x(x)^T]^T$

(12)式の $x=\ell$ に、右辺より $\mathbb{N}_x(x)^T$ を掛け、白色雑音積分を行う。次に、境界条件の処理(9)式、(11)式を用いると、次式を得る。

$$\mathbb{B}'_x\begin{bmatrix}\mathbb{O}_{44} & E[\mathbb{Y}_\ell\mathbb{N}_z(x)^T] \\ \mathbb{O}_{n4} & E[\mathbb{Z}_\ell\mathbb{N}_z(x)^T]\end{bmatrix} = \mathbb{B}'_x\Phi_x(\ell,0)\mathbb{B}_x\begin{bmatrix}\mathbb{O}_{24} & E[\widetilde{\mathbb{Y}}_0\mathbb{N}_z(x)^T] \\ \mathbb{O}_{n4} & \mathbb{O}_{nn}\end{bmatrix} + \mathbb{B}'\Phi_x(\ell,x)\mathbb{Q}_x(x) \quad \cdots\cdots (15)$$

これより $E[\widetilde{\mathbb{Y}}_0\mathbb{N}_z(x)^T]$ が得られるので $E[\mathbb{X}_0\mathbb{N}_x(x)]$ を求めることができる。

c）初期条件の共分散

$x=\ell$ における応答の共分散の両辺に、$\mathbb{B}'_x$, $\mathbb{B}'^T_x$ を掛ける。ここに、$\mathbb{P}(\ell)$ は、$\mathbb{R}_x(0)=\mathbb{O}$ のときの(13)式の $x=\ell$ の解。

$$\mathbb{B}'_x\mathbb{R}_{x\ell}\mathbb{B}'^T_x = \mathbb{B}'_x\Phi_x(\ell,0)\mathbb{B}_x\widetilde{\mathbb{R}}_{x_0}\mathbb{B}^T_x\Phi_x(\ell,0)\mathbb{B}'^T + \mathbb{B}'_x\mathbb{P}_x(\ell)\mathbb{B}'^T_x \quad \cdots\cdots\cdots (16)$$

$$\begin{bmatrix}\mathbb{O}_{22} & \mathbb{O}_{2n} \\ \mathbb{O}_{n2} & \mathbb{R}_z\end{bmatrix} = \mathbb{D}\begin{bmatrix}\widetilde{\mathbb{R}}_{Y_0} & \widetilde{\mathbb{R}}_{YZ_0} \\ \mathbb{R}_{ZY_0} & \mathbb{R}_z\end{bmatrix}\mathbb{D}^T + \mathbb{B}'_x\mathbb{P}_x(\ell)\mathbb{B}'^T_x,\quad \mathbb{D} = \mathbb{B}'_x\Phi_x(\ell,0)\mathbb{B}_x \quad \cdots\cdots (17)$$

これより、$\widetilde{\mathbb{R}}_{x_0}$ を得る。$\mathbb{R}_{x_0} = \mathbb{B}_x\widetilde{\mathbb{R}}_{x_0}\mathbb{B}^T_x$ である。

b), c)の結果を用いることにより、(13)式を解くことができる。

5．数値解析例

荷重のモデルとしては、帯域制限過程と狭帯域過程を考えた。ここでは、帯域制限過程の計算結果を示した。図-2は、計算に用いたパラメータKに対する自己相関関数である。なお、Kは、$K=\Omega\ell$ の無次元パラメータである。図-3は、単純ばりに不規則分布荷重が作用した場合の、それぞれの標準偏差を表わしている。分布荷重の強度を、次の関係で規定した。なお、g は等分布荷重の荷重強度である。それぞれの応答は、等分布荷重の最大値で規格化したものである。解析結果の詳細は、講演会当日発表する。本解法は、任意のパワースペクトルを有する不規則分布荷重に対して有効である。

自己相関関数：$R_r(\lambda) = \sigma^2 e^{-\Omega\lvert\lambda\rvert}$
パワースペクトル：$S_r(\omega) = 2\Omega\sigma^2/(\omega^2+\Omega^2)$
荷重系の方程式
$dz(x)/dx = -\Omega z(x) + \sigma n(x)$
$r(x) = \sqrt{2\Omega}\ z(x)$
$n(x)$：分散1の白色雑音過程

$$\sigma^2\ell/g = 1 \quad \cdots\cdots\cdots (18)$$

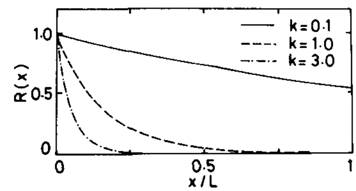

図-2　分布荷重の相関関数

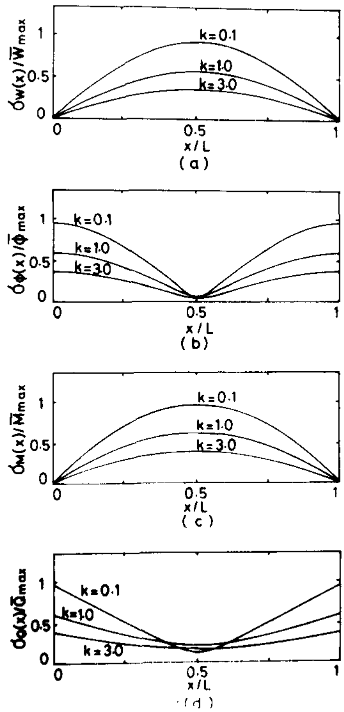

図-3　不規則応答

〔参考文献〕(1)ルジャニツィン(高岡訳) 構造物の信頼性解析，(2)高岡，中国・四国32回講演会，松保・36回全国大会，(3)岡林，土木学会論文報告集オ316号，1981年12月，(4)高岡，討論，土木学会論文，1982年10月，(5)成岡，他，伝達マトリックス法