I-206　データ数を考慮した特性値・安全係数の設定に関する考察

山梨大学工学部　正員　杉山 俊幸
東京大学工学部　正員　藤野 陽三
東京大学工学部　正員　伊藤　学

1.はじめに

一般に用いられている構造物の設計規範では、構造物の設計変数を、強度 R と荷重 S の2つに分けたとき、$R_d/S_d \geq \nu$ ----① で表わされる安全性照査式に依拠している。 ここで、R_d, S_d は各々 R, S の特性値, ν は安全係数（安全率）である。 Freudenthal, 西野らによると、R_d, S_d として、ある非超過確率 e_R, 超過確率 e_S に対応する特性値を採用し、構造物の破壊確率を許容値以下に抑えられるように e_R, e_S, $\nu(\geq 1)$ を決定するとしている。 確率論的な立場からみると、①式に含まれる e_R, e_S, ν の値を、母集団の分布形に応じて適当に組合わせることによって、目標とする信頼性レベルを達成することが可能である。 しかし、一組の e_R, e_S, ν を用いることにする場合には、e_R, e_S をできるだけ小さい値とし、ν を 1.0 に近づけておく方が、①の照査式により達成される信頼性レベルは、分布形の仮定に対して敏感でない。 一方、e_R, e_S の小さい値に対応する特性値を精度よく推定するためには、かなり多くのデータを必要とするが、現時点において利用できるデータは必ずしも多くない。 従って、少ないデータからでも比較的精度よく推定できる e_R, e_S の大きい特性値を R_d, S_d として採用し、データ不足による不確定性を ν に含ませておいた方がよいとも考えられよう。 そこで本研究では、①の照査式に（陰に）含まれる e_R, e_S, ν を、データ数に応じて変化させることが適切かどうかについて、①の照査式により達成される信頼性レベルと目標信頼性レベルとの整合性という観点から検討することにする。 ただし、ν はデータ不足による不確定性のみを含む係数として考えることにする。

2.特性値・安全係数の設定と達成される信頼性レベル

取扱上の簡便さから、ここでは、①式において S のみが確率変数で、R の特性値 R_d は確定値であるような一変数の信頼性解析モデルを採用するが、得られる結果が一般性を失うことはないと考えられる。 この信頼性解析モデルを用いると、①の照査式により達成される信頼性レベル P_F は、S の分布形における $\nu \times S_d$ に対応する超過確率の値と等しくなる。

さて、ある超過確率 e_S に対応する特性値 S_d と、安全係数 ν を用いた①の照査式に基づいて設計がなされるとする。 図-1は、仮に目標とする信頼性レベル $P_{F,t}$ を、$P_{F,t}=10^{-4}$ としたときに、この $P_{F,t}$ を達成するための e_S と ν の関係を6種類の理論分布形（変動係数 0.2）について示したものである。 たとえば、$e_S=10^{-2}$ に対応する特性値を S_d として採用した場合、S の分布形が LN 分布のときには、$\nu \fallingdotseq 1.32$ とすればよい。 図-1より、ν の値を S の分布形の種類に係わらず一定の値とするならば、$e_S \to P_{F,t}$ とし、$\nu \to 1.0$ としておくほど P_F と $P_{F,t}$ の整合性がよいことが推測できる。 すなわち、データが少ない場合には、母集団がどの分布形に従うのかを正確に判定できないのであるから、どの分布形と判定されても $P_{F,t}$ との整合性をよくするためには、$e_S \to P_{F,t}$, $\nu \to 1.0$ としておく方がよいことになる。

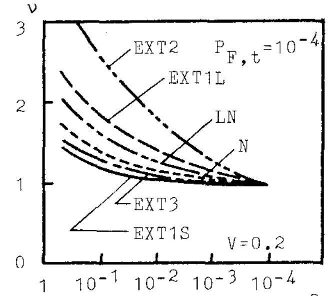

図-1　e_S vs. ν

一方、母集団分布形が既知の有限個のデータから、最尤推定法（ML法）を用いて任意の超過確率に対応する特性値を推定する場合に生じる推定誤差 E =（2乗平均誤差）/（真の特性値） とデータ数 n の関係を示したのが図-2である。 この図は、数値実験により得られた結果であるが、たとえば、20個のデータから $e_S=10^{-2}$ に対応する特性値を推定する場合、母集団分布が変動係数 0.2 の LN 分布ならば、±15%程度の誤差を伴うこ

とがわかる。 すなわち、有限個のデータから特性値を推定する場合には、データ数およびe_sの値に応じて誤差が生じるわけである。

ここで、①の照査式におけるR_dの値として、$e_s = P_{F,t} = 10^{-4}$に対応する特性値S_d'を推定して$R_d = R_d' = S_d'$とする場合と、仮に$e_s = 10^{-1}$に対応する特性値S_d''を推定し、適当な安全係数ν''を乗じて$R_d = R_d'' = \nu'' \times S_d''$とする場合とで、どちらが$R_d$の値としてばらつきが大きいかを考えてみる。 20個のデータから最適合分布が変動係数0.2のLN分布と判定されたとすると、図-2を参照して、R_d'およびR_d''のばらつきは、$\nu'' = 1.62$として、各々、図-3の(1), (2)の範囲とみなせる。 この(1), (2)のばらつきの範囲に対応するP_Fのばらつきの範囲は、各々、図-3の(3), (4)となる。 これより、データが少ない場合には、e_sの大きい特性値を比較的精度よく推定し、その特性値に適当な係数を乗じた値をR_dとしておく方が、P_Fのばらつく範囲が小さくなると考えられる。 従って、実際に設計規準を作成する場合には、この相反する2点を考慮して、如何にe_s, νの値を設定するかが、特にデータの少ない場合に問題となってくる。 そこで、ここでは、あるe_s, νを用いるとした時に、①式により達成される信頼性レベルと目標信頼性レベルとの差の期待値$E[P_F]$（単位 オーダー）が最小となるようなe_s, νが最適であるとの立場に立って、e_s, νおよびデータ数nの関係を調べてみる。

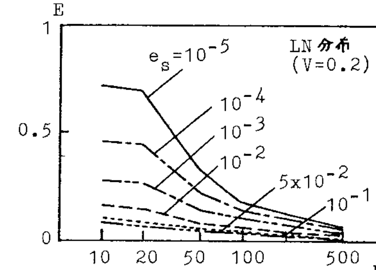

図-2 n vs. E

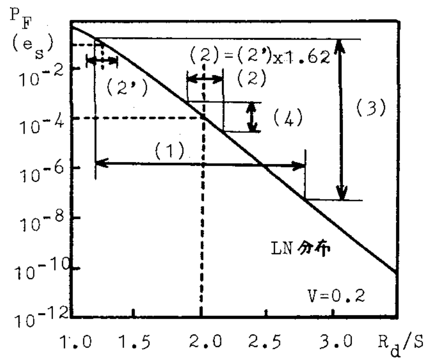

図-3 R_d/S vs. P_F (or e_s)

3. 達成される信頼性レベルのばらつきを最小にするe_s, ν

定式化 e_s'（に対応する特性値S_d'）, ν'を用いた場合の$E[P_F]$を次式に従って算出する。

$$E[P_F] = \sum_i l_i \times \int_{S_{d1}'}^{S_{d2}'} \left| \log_{10} P_F^i(s) - \log_{10} P_{F,t} \right| \frac{ds}{S_{d2}' - S_{d1}'} \quad \text{------ ②}$$

ただし、$P_F^i(s) = 1.0 - F_{s,i}(\nu' \times s)$, $F_{s,i}(\cdot)$: i番目の理論分布の確率分布関数
$S_{d1}' = (1-\varepsilon_i)S_d'$, $S_{d2}' = (1+\varepsilon_i)S_d'$, ε_i : S_d'を推定する場合に予想される推定誤差（データ数の関数）
真の特性値は、区間$[S_{d1}', S_{d2}']$を一様分布する確率変数と仮定
l_i : i番目の理論分布が母集団分布である確率

（定式化の詳細については省略）

計算結果 ②式の$E[P_F]$を最小にするe_s, νおよびデータ数nの関係を示したのが図-4である。 これより、実際に利用できるデータが50個程度以下の場合には、$e_s = 10^{-2}$程度の特性値をS_dとして用いるとき、$E[P_F]$が最小となっていることがわかる。 すなわち、データが少ない場合には、e_sを小さくしすぎても、また、大きくしすぎてもP_Fのばらつきが大きくなるといえよう。 データ数が100以上の場合には、母集団分布形がかなり正確に判定できるようになってくるため、どのe_s, νの組合せを用いてもよいことが図-4よりわかる。

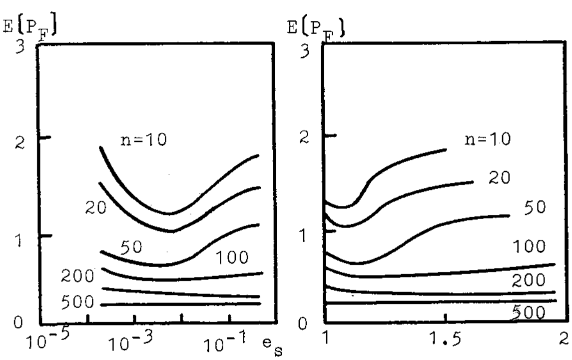

図-4 e_s or ν vs. $E[P_F]$

4. まとめ

①の安全性照査式に含まれる特性値や安全係数を、不確定量に関するデータの数に応じて変化させる方がよいかどうか、データ数が少ない場合にはデータ不足による不確定性を安全係数に含ませた方がよいかどうかについて検討を加えた。 その結果、データが少ない場合には、設計値として用いる特性値の(非)超過確率の値が大きすぎても、また小さすぎても適当ではないことが明らかとなった。