

CRC 正員 田形 一則
 CRC 正員 渡辺 隆一
 東大工 矢川 元基

1. はじめに

貫通き裂を有する平板やシェルについては、これまで Folias⁽¹⁾、Endogan・Kibler⁽²⁾などにより Kirchhoff の仮定に基づいた特異解が解析的に求められている。しかし、Hartmann⁽³⁾は、Kirchhoff の仮定に基づいた薄肉シェルの古典理論は、応力の特異性のあるき裂問題に適していないことを明らかにしている。これに関連して Sih⁽⁴⁾は、貫通き裂を有する平板について、き裂前縁近傍では曲げ応力の変化が急勾配となり、板厚やき裂長さと同係して面外せん断応力が大きく変化することを示している。このような事から、Sih・Hagendorf⁽⁵⁾は、面外せん断変形効果を考慮した高次のシェル理論を提案し、古典理論との比較を行っている。

本論文では、Ahmadら⁽⁶⁾が提案した8節点厚肉シェル要素を部分的に改良した要素⁽⁷⁾を用いて、貫通き裂を有するシェル構造物のき裂前縁に沿った丁積分の分布を評価する方法を示すとともに、幾つかの数値計算例を示す。なお、この8節点厚肉シェル要素は、せん断変形を考慮した高次のシェル理論に対応している。

2. き裂縁に沿った丁積分の評価法

図1に示すような貫通き裂を有するシェル構造物について考える。図中において、板厚方向における層は、8節点シェル要素を用いてモデル化した場合の、応力とひずみの評価層である。これより任意の評価層を、図2に示すように取り出す。図2において、 x, y, z は全体座標系、 $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ はき裂先端にとり局部座標系、 x', y', z' は要素の積分点ごとに定める局部座標系である。 Γ は丁積分経路であり、 A は Γ に囲まれた面積である。 $\bar{n}_j$ は経路 Γ に対する外法線ベクトルである。また $\bar{x}$ 軸はき裂面に接する方向、 $\bar{y}$ 軸はき裂面に垂直方向および $\bar{z}$ 軸はき裂前縁に接する方向になっている。 $\bar{z}$ 軸は面に対して法線方向に定めている。この評価層において物体力や熱ひずみのない非線形弾性体に対する丁積分式は、Eshelby の Energy Momentum Tensor⁽⁸⁾を用いて次のように表わせる。

$$J_K = \int_{\Gamma} (\bar{\sigma} \bar{n}_K - \bar{\sigma}_{ij} \bar{n}_j \frac{\partial u_i}{\partial K}) d\Gamma + \int_A \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial x'} \bar{n}_K - \frac{\partial}{\partial x'} (\bar{\sigma}_{ij} \bar{n}_j \frac{\partial u_i}{\partial K}) \right\} dA \quad (1)$$

ここで、 K は $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ を表わし、 $\bar{n}_j$ と $\bar{n}'_j$ ($j = \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$) は $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ 座標系で求めた単位法線ベクトルである。 $\bar{n}'_j$ は $\bar{z}$ 方向の法線ベクトルである。(一) は $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ 系で評価した物理量であり、 $\bar{u}_i$ ($i = \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$) は変位成分、 $\bar{\sigma}_{ij}$ と $\bar{E}_{ij}$ は応力とひずみのテンソル

であり $\bar{\sigma}$ は、

$$\bar{\sigma} = \int_0^t \bar{\sigma}_{ij} \bar{\sigma}_{ij} d\bar{E}_{ij} \quad (2)$$

である。

3. 数値計算例

図1. 貫通き裂を有するシェル構造物

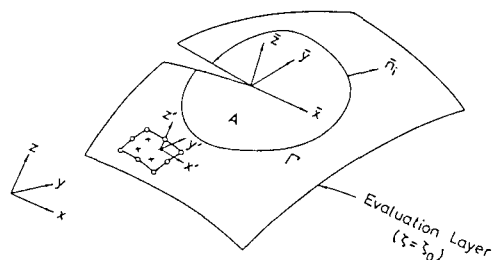


図2. シェル要素の任意評価層

3.1 曲げモーメント荷重を受ける中央き裂付き平板の解析

ここでは、図3に示した平板モデルの両端に $\bar{M} = M_0 r / 6$ のモーメント荷重が分布した場合について計算を行い、Yagawa・NishioKa⁽⁹⁾の結果と比較する。有限要素モデルと丁積分経路は、図4に示した。ヤング係数とポアソン比は、 $E = 2.06 \times 10^5 \text{ MPa}$, $\nu = 0.3$ である。板表面における無次元化応力拡大係数は、 $F_I = K_I / \sigma_0 \sqrt{\pi c}$ と求めた。ここで $K_I = \sqrt{K_{II}}$ と表わす(平面応力: $K = E$, 平

面ひずみ: $\epsilon = E/(1-\nu^2)$ 。図5では、 $t/2c = 0.25$ のときの結果を示した。き裂前縁に沿った J 値分布は、3次元中実要素を用いた結果とともに図6に示した。この値は、 $t/2c = 0.25$, $C/w = 0.4$ の結果で、各条件は $w = 100\text{mm}$, $C = 40\text{mm}$, $t = 20\text{mm}$, $\bar{P} = 1961.33\text{N}\cdot\text{mm/mm}$ である。

3.2 内圧を受ける貫通き裂付き円筒シェルの解析

図7に示すような軸方向貫通き裂付き円筒の解析を行い、補正係数 F とシェルパラメータ λ の関係求め、Folias⁽¹⁾, Erdoganら⁽²⁾およびAndoら⁽¹⁰⁾の結果と比較する。有限要素モデルと J 積分経路は、図8に示す。ヤング係数とポアソン比は、 $2.06 \times 10^5\text{MPa}$ と 0.3 とし、内圧は $P = 9.81 \times 10^4\text{Pa}$ とした。ここで、シェルパラメータは $\lambda = [12(1-\nu^2)]^{1/4} C/(Rt)^{3/2}$ と与えられる。また、補正係数は $F = K_s/\sigma_n \sqrt{\pi c}$ と与えられる。ここで、 K_s はシェルの応力拡大係数、 σ_n は周方向応力である。結果は、図9に示した。

4 考察

図5に示した結果は、Yagawaらの結果と比較して依目の値を示しているが、傾向は良く一致している。図6の結果は、3次元中実要素の結果と良く一致していると考えられる。

図9において、平面応力および平面ひずみ条件の解は、それぞれAndoらとErdoganらの値と良く一致している。

[参考文献] (1)Folias, E.S., *Int. J. Fract.*, Vol. 1 (1965) PP.104. (2)Erdogan, F., Kibler J.J., *Int. J. Fract. Mech.*, Vol. 5 (1969) PP.229. (3)Hartman, R.J., *Mechanics of Fracture*, By Sih, G.C. Noordhoff, Vol. 3 (1977) (4) Sih, G.C., *Trans. ASME, J. Engng. Ind.* (1970) PP.350. (5) Sih, G.C., Hagendorf, H.C. *Mechanics of Fracture*, Noordhoff, Vol. 3 (1977) (6) Armad, S., et al., *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 2 (1970) PP. 419. (7) 渡辺 他, 機構論, No. 820-12 (BB57) PP. 150. (8) Eshelby, J.D. *Inelastic Behavior of Solids*, By Kanninen et al. McGraw-Hill (1969). (9) Yagawa, G., Nishioka, T., *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 14 (1979) PP. 727. (10) Ando et al. 2nd. SHIRT (1973) G 5/4.

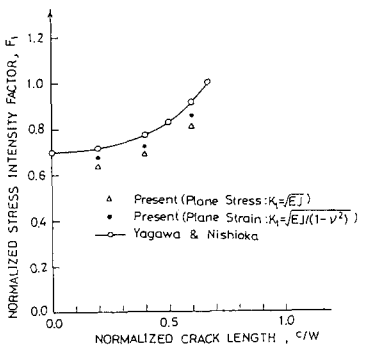


図5. 応力拡大係数の分布 ($t/2c = 0.25$)

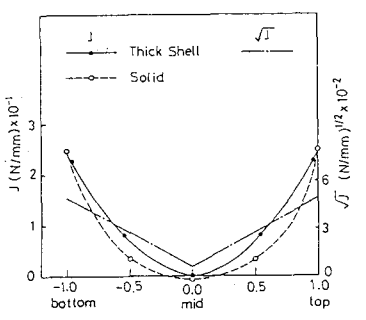


図6. き裂縁に沿った J 値分布

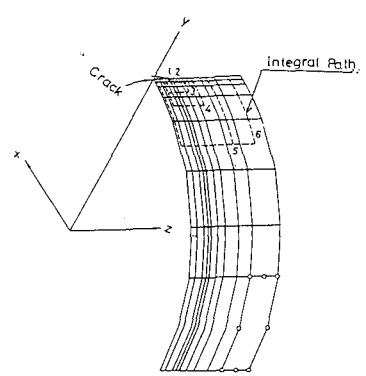


図8. 有限要素モデルと J 積分経路

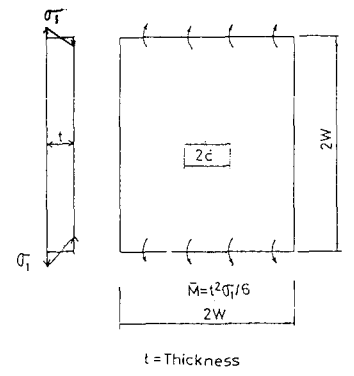


図3. 中央き裂付き平板

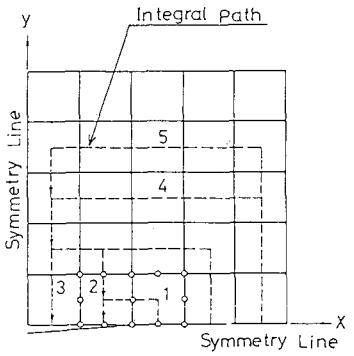


図4. 有限要素モデルと J 積分経路

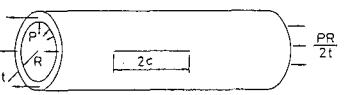


図7. 内圧を受ける軸方向貫通き裂付き円筒

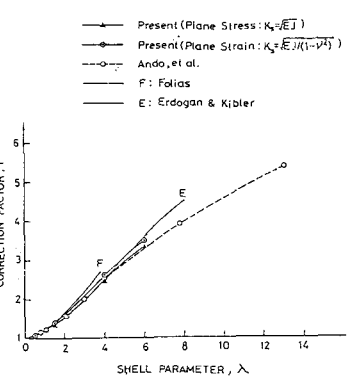


図9. 補正係数とシェルパラメータの関係