I-80　有限変位理論に基づく薄肉シェルの境界条件式について

東京電機大学　正員　○井浦雅司
早稲田大学　正員　平嶋政治

## 1. はじめに

シェルの有限変位理論については，これまで多くの研究が発表されている。その大部分は，Kirchhoff-Loveの仮定に基づいており，かなり精密な理論が展開されているが，境界条件式の扱いについては未だ議論の余地があるものと思われる。SimmondsとDanielson[1]は，変位成分を用いずに幾何学的境界条件式を導いており注目されるが，ここでは従来の理論と比較検討するために，変位成分で表示された条件式について調べる。Stumpf[2]は結果的には非線形の条件式を求めているが，その誘導過程を見ると，むしろ線形の条件式となる方が合理的と思われる。桜井ら[3]は，回転角に関する項において，常にそれらが一定量であるという仮定を用いているが，その変分は常に零となるために，それに対応する力学的境界条件式の扱いに疑問が残る。Pietraszkiewicz[4][5][6]は，これまでのKoiterに代表される理論に比べ，精密な境界条件式を導いており，Eulerの手法を用いる場合は妥当な式と思われるが，Lagrangeの手法においても，変形後の基底ベクトルに関する回転角が規定されており，従来の理論と異なっている。

本報告は，Pietraszkiewiczの方法に従い，Lagrangeの手法を用いてシェルの有限変位理論について考察する。その際に次の仮定を用いる。(1). 変形前の中央面に垂直な線素は，変形後の中央面に対しても垂直である。(2). 平面応力状態である。(3). 微小ひずみである。

## 2. シェルの変形

本報告の記号はPietraszkiewicz[5]に準ずるものとし，その主なものを記す。シェル中央面上の変形前の基底ベクトルを $\mathbf{a}_\alpha$ とし，法線ベクトルは $\mathbf{n}$ とする。変形後の量を $(\bar{\ })$ と表わすと，変形後のベクトル $\bar{\mathbf{a}}_\alpha$，$\bar{\mathbf{n}}$ はそれぞれ以下のように表わされる。

$$\bar{\mathbf{a}}_\alpha = l_{\lambda\alpha}\mathbf{a}^\lambda + \phi_\alpha \mathbf{n} = \mathbf{a}_\alpha + \mathbf{u}_{,\alpha} \qquad (1)$$

$$\bar{\mathbf{n}} = n_\alpha \mathbf{a}^\alpha + n\,\mathbf{n} \qquad (2)$$

ここに，$\mathbf{u}$ はシェル中央面の変位ベクトルであり，

$$l_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} + \theta_{\alpha\beta} - \omega_{\alpha\beta}\ ,\quad l^{\alpha}_{\cdot\beta} = \delta^\alpha_\beta + u^\alpha|_\beta - b^\alpha_\beta w$$

$$\theta_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(u_\alpha|_\beta + u_\beta|_\alpha) - b_{\alpha\beta} w\ ,\quad \phi_\alpha = w_{,\alpha} + b^\lambda_\alpha u_\lambda$$

$$\omega_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(u_\beta|_\alpha - u_\alpha|_\beta),\quad n_\mu = \sqrt{\frac{a}{\bar{a}}}\,\epsilon^{\alpha\beta}\epsilon_{\lambda\mu}\phi_\alpha l^{\lambda}_{\cdot\beta}$$

$$n = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{\bar{a}}}\,\epsilon^{\alpha\beta}\epsilon_{\lambda\mu} l^{\lambda}_{\cdot\alpha} l^{\mu}_{\cdot\beta} \qquad (3)\sim(9)$$

であり，$(\ )|_\alpha$ は変形前の計量テンソル $a_{\alpha\beta}$ に関する共変微分であり，$a = |a_{\alpha\beta}|$ である。シェル内任意点における変位ベクトル $\mathbf{V}$ は

$$\mathbf{V} = \mathbf{u} + \zeta\boldsymbol{\beta}\ ,\qquad \boldsymbol{\beta} = \bar{\mathbf{n}} - \mathbf{n} \qquad (10),(11)$$

と表わされる。中央面上におけるひずみテンソルおよび曲率変化テンソルはそれぞれ

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\bar{a}_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta})\ ,\quad \kappa_{\alpha\beta} = -(\bar{b}_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta}) \qquad (12),(13)$$

と与えられ，その変分は $\delta\bar{\mathbf{n}}\cdot\bar{\mathbf{a}}_\alpha = -\delta\bar{\mathbf{a}}_\alpha\cdot\bar{\mathbf{n}}$ を用いて

$$\delta\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\delta\mathbf{u}_{,\alpha}\cdot\bar{\mathbf{a}}_\beta + \bar{\mathbf{a}}_\alpha\cdot\delta\mathbf{u}_{,\beta}) \qquad (14)$$

$$\delta\kappa_{\alpha\beta} = -\{(\delta\mathbf{u}_{,\alpha})|_\beta - \bar{a}^{\kappa\lambda}\gamma_{\lambda\alpha\beta}\,\delta\mathbf{u}_{,\kappa}\}\cdot\bar{\mathbf{n}} \qquad (15)$$

と表わされ，ここに

$$\gamma_{\lambda\alpha\beta} = \gamma_{\lambda\alpha}|_\beta + \gamma_{\lambda\beta}|_\alpha - \gamma_{\alpha\beta}|_\lambda \qquad (16)$$

である。

## 3. シェル境界における変形

極分解定理により，変形は剛体移動，剛体回転，ひずみの主方向に沿った伸縮に分解できる[5]。しかしながら，シェル境界上において，$\mathbf{t}$，$\boldsymbol{\nu}$ ベクトルの方向は一般にひずみの主方向と一致しないために，主方向への伸縮に伴い $\mathbf{t}$，$\boldsymbol{\nu}$ ベクトルは回転する。そこで，剛体回転をも含めた全回転ベクトルを $\boldsymbol{\Omega}_t$ で表わすと，各ベクトルとの間に以下の関係式が得られる。

$$\bar{\mathbf{a}}_\nu = \bar{a}_t[\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\Omega}_t\times\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\Omega}_t\times(\boldsymbol{\Omega}_t\times\boldsymbol{\nu})/2\cos^2\omega_t/2] \qquad (17)$$

$$\bar{\mathbf{a}}_t = \bar{a}_t[\mathbf{t} + \boldsymbol{\Omega}_t\times\mathbf{t} + \boldsymbol{\Omega}_t\times(\boldsymbol{\Omega}_t\times\mathbf{t})/2\cos^2\omega_t/2] \qquad (18)$$

$$\bar{\mathbf{n}} = [\mathbf{n} + \boldsymbol{\Omega}_t\times\mathbf{n} + \boldsymbol{\Omega}_t\times(\boldsymbol{\Omega}_t\times\mathbf{n})/2\cos^2\omega_t/2] \qquad (19)$$

ここに，$\sin\omega_t$ は $\boldsymbol{\Omega}_t$ の大きさを示し，

$$\bar{a}_t = |\bar{\mathbf{a}}_t| = |\bar{\mathbf{a}}_\nu| \qquad (20)$$

であり，$\bar{\boldsymbol{\nu}} = \bar{\mathbf{a}}_\nu/\bar{a}_t$，$\bar{\mathbf{t}} = \bar{\mathbf{a}}_t/\bar{a}_t$ は単位ベクトルである。(17)～(19)式より $\boldsymbol{\Omega}_t$ と各ベクトルの内積が

$$2\boldsymbol{\Omega}_t\cdot\mathbf{t} = \bar{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\nu} - \bar{\boldsymbol{\nu}}\cdot\mathbf{n} \qquad (21)$$

$$2\boldsymbol{\Omega}_t\cdot\mathbf{v}=\bar{\mathbf{t}}\cdot\mathbf{n}-\bar{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{t} \qquad (22)$$

$$2\boldsymbol{\Omega}_t\cdot\mathbf{n}=\bar{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{t}-\bar{\mathbf{t}}\cdot\mathbf{v} \qquad (23)$$

と表わされる。

## 4. 仮想仕事の原理

対称なLagrangeの断面力およびモーメントテンソルを用いて仮想仕事の原理を表わすと,[5][6]

$$\iint(N^{\alpha\beta}\delta\gamma_{\alpha\beta}+M^{\alpha\beta}\delta\kappa_{\alpha\beta})dA$$
$$=\iint\mathbf{P}\cdot\delta\mathbf{u}\,dA+\int(\mathbf{F}\cdot\delta\mathbf{u}+\mathbf{k}\cdot\delta\boldsymbol{\Omega}_t)ds \quad (24)$$

となり, ここに

$$\mathbf{P}=P^{\alpha}\mathbf{a}_{\alpha}+P\mathbf{n}\ ,\quad \mathbf{F}=F_{\nu}\mathbf{v}+F_t\mathbf{t}+F\mathbf{n}\ , \quad (25),(26)$$

$$\mathbf{k}=-k_t\mathbf{v}+k_{\nu}\mathbf{t}+k\mathbf{n} \qquad (27)$$

である。(14),(15)式を用いて(24)式の左辺を整理すると

$$\iint(N^{\alpha\beta}\delta\gamma_{\alpha\beta}+M^{\alpha\beta}\delta\kappa_{\alpha\beta})dA=-\iint[(N^{\alpha\beta}\bar{\mathbf{a}}_{\alpha})|_{\beta}+(M^{\alpha\beta}\bar{\mathbf{n}})|_{\alpha\beta}$$
$$+(M^{\alpha\kappa}\bar{a}^{\beta\lambda}\gamma_{\lambda\alpha\kappa}\bar{\mathbf{n}})|_{\beta}]\cdot\delta\mathbf{u}\,dA+\int[\{N^{\alpha\beta}\bar{\mathbf{a}}_{\beta}+(M^{\alpha\beta}\bar{\mathbf{n}})|_{\beta}$$
$$+M^{\kappa\beta}\bar{a}^{\alpha\lambda}\gamma_{\lambda\kappa\beta}\bar{\mathbf{n}}\}\nu_{\alpha}\cdot\delta\mathbf{u}\underline{-M^{\alpha\beta}\nu_{\alpha}\delta\mathbf{u}_{,\beta}\cdot\bar{\mathbf{n}}}]ds \quad (28)$$

となる。さらに下線部については

$$-\int M^{\alpha\beta}\nu_{\alpha}\delta\mathbf{u}_{,\beta}\cdot\bar{\mathbf{n}}\,ds=-[M^{\alpha\beta}\nu_{\alpha}t_{\beta}\bar{\mathbf{n}}\cdot\delta\mathbf{u}]$$
$$+\int[(M^{\alpha\beta}\nu_{\alpha}t_{\beta}\bar{\mathbf{n}})_{,s}\cdot\delta\mathbf{u}+M^{\alpha\beta}\nu_{\alpha}\nu_{\beta}\delta\bar{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{v}]ds \quad (29)$$

となる。ここで, $\delta\bar{\mathbf{n}}\cdot\bar{\mathbf{v}}=\delta\bar{\mathbf{n}}\cdot(\mathbf{v}+\nu^{\alpha}\mathbf{u}_{,\alpha})$なる項が表われるが右辺第2項の内積は微小として無視している。

次に(24)式の右辺について考える。まず(21)~(23)式より以下の関係式が得られる。

$$\delta\boldsymbol{\Omega}_t\cdot\mathbf{t}=\frac{1}{2}\delta(\bar{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{v}-\bar{\mathbf{n}}\cdot(\mathbf{n}\times\bar{\mathbf{t}}))\doteqdot\delta\bar{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{v} \qquad (30)$$

$$\delta\boldsymbol{\Omega}_t\cdot\mathbf{v}=\frac{1}{2}\delta(\bar{\mathbf{t}}\cdot\mathbf{n}-\bar{\mathbf{t}}\cdot(\mathbf{t}\times\bar{\mathbf{v}}))\doteqdot\delta\mathbf{u}_{,s}\cdot\mathbf{n} \qquad (31)$$

$$\delta\boldsymbol{\Omega}_t\cdot\mathbf{n}=\frac{1}{2}\delta(\bar{\mathbf{t}}\cdot(\bar{\mathbf{n}}\times\mathbf{t})-\bar{\mathbf{t}}\cdot\mathbf{v})\doteqdot-\delta\mathbf{u}_{,s}\cdot\mathbf{v} \qquad (32)$$

以上の誘導においても微小ひずみの仮定を用いている。
(30)~(32)式を用いると(24)式の右辺は

$$\iint\mathbf{P}\cdot\delta\mathbf{u}\,dA+\int(\mathbf{F}\cdot\delta\mathbf{u}+\mathbf{k}\cdot\delta\boldsymbol{\Omega}_t)ds$$
$$=\iint\mathbf{P}\cdot\delta\mathbf{u}\,dA+\int[\{\mathbf{F}+(k_t\mathbf{n})_{,s}+(k\mathbf{v})_{,s}\}\cdot\delta\mathbf{u}$$
$$+k_{\nu}\delta\bar{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{v}]ds-[(k_t\mathbf{n}+k\mathbf{v})\cdot\delta\mathbf{u}] \qquad (33)$$

と表わされる。ここで

$$\boldsymbol{\beta}=\beta_{\nu}^{*}\mathbf{v}+\beta_t^{*}\mathbf{t}+\beta^{*}\mathbf{n} \qquad (34)$$

と表わすと, (11)式より

$$\delta\bar{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{v}=\delta\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{v}=\delta\beta_{\nu}^{*} \qquad (35)$$

なる関係式が得られる。

以上より, 平衡方程式は

$$(N^{\alpha\beta}\bar{\mathbf{a}}_{\alpha})|_{\beta}+(M^{\alpha\beta}\bar{\mathbf{n}})|_{\alpha\beta}+(M^{\alpha\kappa}\bar{a}^{\beta\lambda}\gamma_{\lambda\alpha\kappa}\bar{\mathbf{n}})|_{\beta}+\mathbf{P}=\mathbf{0} \quad (36)$$

と示され, 境界条件式は

$$\{N^{\alpha\beta}\bar{\mathbf{a}}_{\beta}+(M^{\alpha\beta}\bar{\mathbf{n}})|_{\beta}+M^{\kappa\beta}\bar{a}^{\alpha\lambda}\gamma_{\lambda\kappa\beta}\bar{\mathbf{n}}\}\nu_{\alpha}+(M^{\alpha\beta}\nu_{\alpha}t_{\beta}\bar{\mathbf{n}})_{,s}$$
$$=\mathbf{F}+(k_t\mathbf{n})_{,s}+(k\mathbf{v})_{,s}\quad or\quad \mathbf{u}=\mathbf{A}(s) \qquad (37)$$

$$M^{\alpha\beta}\nu_{\alpha}\nu_{\beta}=K_{\nu}\quad or\quad \beta_{\nu}^{*}=B(s) \qquad (38)$$

となる。

## 5. 考察

まずPietraszkiewiczと本報告との差異について調べる。文献[4]においては, 全回転ベクトル$\boldsymbol{\Omega}_t$の変分において近似式が用いられており, さらに明確な形で境界辺上における回転量を表わしておらず, $(\bar{\mathbf{n}}\cdot\delta\mathbf{u})_{,\nu}$という表現を用いている。文献[5],[6]においては, $\boldsymbol{\beta}$ベクトルを変形後のベクトルを用いて

$$\boldsymbol{\beta}=\beta_{\nu}\bar{\mathbf{a}}_{\nu}+\beta_t\bar{\mathbf{a}}_t+\beta\bar{\mathbf{n}} \qquad (39)$$

と表わし, 幾何学的な考察から, 幾何学的境界条件式として, $\mathbf{u}(s)=\mathbf{A}(s)$, $\beta_{\nu}(s)=b(s)$を求めている。一方, Lagrangeの手法により仮想仕事の原理を用いて境界条件式が得られているが, そこでは[6]

$$\delta\beta_{\nu}=\delta\boldsymbol{\Omega}_t\cdot\bar{\mathbf{t}} \qquad (40)$$

なる関係式を用いて, Eulerの手法と同一の幾何学的境界条件式である$\beta_{\nu}(s)=b(s)$を得ている。なお, $\delta\beta_{\nu}$に相当する力学的境界条件式は両手法により異なった形となっている。

筆者は, (17)~(19)式を用いて

$$\delta\boldsymbol{\Omega}_t\cdot\bar{\mathbf{t}}=\frac{1}{2}(\bar{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{v}-\bar{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{n})-\boldsymbol{\Omega}_t\cdot\delta\bar{\mathbf{t}} \qquad (41)$$

なる関係式が得られることから, (40)式の関係を求めたが, 近似を行わない限り(40)式の関係が得られなかった。以上のことより, Lagrangeの手法を用いた場合には, $\beta_{\nu}$よりは$\beta_{\nu}^{*}$を回転量として規定した方がより妥当性があるものと思われる。Stumpfと本報告の結果は$\beta_{\nu}^{*}$に関する限り同一であるが, 一部の結果に差異が見られ, その誘導過程も異なる。

次に他の理論と比較検討のために, $\beta_{\nu}^{*}$と$\beta_{\nu}$を陽な形で表わすと

$$\beta_{\nu}^{*}=n_{\mu}\nu^{\mu}=\sqrt{a/\bar{a}}\,\epsilon^{\alpha\beta}\epsilon_{\lambda\mu}\nu^{\mu}\phi_{\alpha}l^{\lambda}_{\cdot\beta} \qquad (42)$$

$$\beta_{\nu}=-\frac{1}{\bar{a}_t^{3}}\sqrt{a/\bar{a}}\,\nu_{\alpha}\bar{a}^{\alpha\beta}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}_{,\beta}) \qquad (43)$$

となる。具体的な比較は紙面の都合上省略する。

## 6. 参考文献


[1] Simmonds&Danielson : Proc.Kon. Ned. Ak. Wet., Vol.73, 1970
[2] Stumpf : Ingenieur-Archiv, 51(1981).
[3] 桜井・長谷川・西野 : 土木学会論文報告集, No.330, 1983
[4] Pietraszkiewicz : Archives of Mechanics, No.2, 1974
[5] Pietraszkiewicz : Lecture Notes for CISM, No.240, 1980
[6] Pietraszkiewicz : Proc. of IUTAM Symp. 1978