

埼玉大学工学部 学生員 ○ 興井義昭  
 埼玉大学工学部 正 員 秋山成興  
 電力中央研究所 正 員 青柳 栄

## 1. はじめに

原子力構造物をはじめとして、シェル構造物は多方面に用いられているが、このような構造物における最大の弱点である接合部の理論解析は十分とは言えず、実験的な研究が主流である。その理由は主に、接合線が複雑な空間曲線となり、接合部での応力、変形量の連続条件を厳密に満足させる事が困難である事に帰因される。本研究では、解析的な手法を基礎として、球シェルと円筒シェルが斜交して接合される場合の応力解析を境界層の理論を用いて行なった。なお、荷重条件は一様な内圧が作用する場合を採用した。

## 2. 解析方法

基本応力状態として、球シェルと円筒シェルが直交する場合を選びこの応力状態を $\tilde{S}$ とする。次に斜交することによって生じる攪乱応力状態 $S$ は境界層の理論から導かれる応力関数で評価した。したがって実際の応力状態 $\hat{S}$ は、 $\hat{S} = S + \tilde{S}$  で与えられる。

2-1 基本応力状態 斜交の場合の応力状態を求める為には、基本応力状態(直交の場合)を厳密に求めておく必要がある。球シェル、円筒シェル共、シェルの基礎方程式として、Shallow Shellの基礎方程式を用いる。

$$\Delta \Delta \psi - \frac{1}{C} \Delta \kappa \psi = 0 \quad (1)$$

ここで、 $\Delta$ はラプラシアン、 $(\nu^2 = -1)$ 、 $\psi = F - LEhcW$ 、 $C = h/\sqrt{12(1-\nu^2)}$ 、 $F$ はAiryの応力関数である。(1)の一般解(軸対称解)は、球シェルを添字II、円筒シェルを添字Iで表せば次式となる。

$$\tilde{\psi}_I = (A_c + iB_c) \exp(r\xi/\sqrt{2}) (\cos \frac{1}{\sqrt{2}} r\xi - i \sin \frac{1}{\sqrt{2}} r\xi) \quad (2)$$

$$\tilde{\psi}_{II} = C_s \ln p + (A_s + iB_s) \frac{2}{\pi} \left\{ \text{kei}_0(p\mu) - i \text{ker}_0(p\mu) \right\} \quad (3)$$

ここで、 $A_c, B_c, A_s, B_s, C_s$  は積分定数、 $\xi = z/R_I$ 、 $p = r/R_I$

$$\delta = \sqrt{R_I/12(1-\nu^2)}/h_I, \quad \mu = R_I [12(1-\nu^2)]^{1/4} / \sqrt{R_{II} h_{II}}$$

これより、断面力、変形量等は次式より得られる。

$$\tilde{Q}_{\alpha\alpha}^I = \frac{1}{R_I} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \text{Re } \tilde{\psi}_I, \quad \tilde{Q}_{\alpha\alpha}^{II} = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \text{Re } \tilde{\psi}_{II}, \dots, E_I h_I C_I \tilde{K}_{\alpha\alpha}^I = -\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \text{Im } \tilde{\psi}_I \quad (4)$$

$$\tilde{Q}_{\alpha\alpha}^{II} = \left( \frac{1}{R_I} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \text{Re } \tilde{\psi}_{II}, \quad \tilde{Q}_{\alpha\alpha}^{II} = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \text{Re } \tilde{\psi}_{II}, \dots, E_{II} h_{II} C_{II} \tilde{K}_{\alpha\alpha}^{II} = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \text{Im } \tilde{\psi}_{II} \quad (5)$$

[境界条件] (4),(5)式に各々(2),(3)式を代入し、その中に含まれる積分定数を境界条件式によって決定する。境界条件式は接合線上における断面力、変形量の連続条件より次の5つとなる。ただし $\{\}$ は境界量を示す。

$$\begin{aligned} \{\tilde{M}_{\alpha\alpha}^I\} &= \{\tilde{M}_{\alpha\alpha}^{II}\} & \{\tilde{E}_{\alpha\alpha}^I\} &= \{\tilde{E}_{\alpha\alpha}^{II}\} \\ \{\tilde{Q}_{\alpha\alpha}^I\} &= \sin\zeta \{\tilde{Q}_{\alpha\alpha}^{II}\} - \cos\zeta \{\tilde{Q}_{\alpha\alpha}^{II}\} & \{\tilde{K}_{\alpha\alpha}^I\} \cos\zeta &= \{\tilde{K}_{\alpha\alpha}^{II}\} \\ \{\tilde{Q}_{\alpha\alpha}^I\} &= \cos\zeta \{\tilde{Q}_{\alpha\alpha}^{II}\} + \sin\zeta \{\tilde{Q}_{\alpha\alpha}^{II}\} \end{aligned} \quad (6)$$

(6)式を解く事により、基本応力状態(直交の場合)が決定される。

2-2 攪乱応力状態 攪乱応力状態を表わす応力関数として、球シェルについては境界層の理論から導かれる応力関数を用いる。ここで境界層の理論とは、一般に最高階に微小パラメータを持つ微分方程式はその解の中に

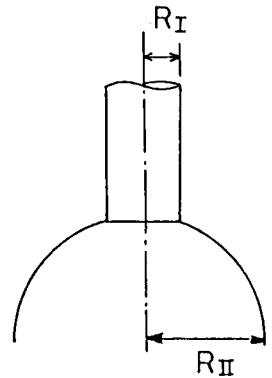


Fig-1 Basic Stress State

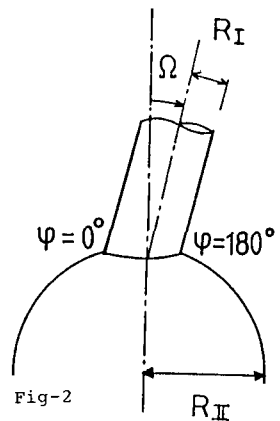


Fig-2

減衰の速い境界層タイプの解を有するという特質に着目し、Shallow Shell  
の方程式から、境界層タイプの解を誘導したものである。具体的には、Fig 3  
の様に直交曲線座標系 $(\alpha, \beta)$ を採用すれば、接合部近傍での応力、変形状態  
は、 $\alpha$ 方向（接合線に沿った方向）にはあまり変化せず、 $\beta$ 方向（接合線と  
直角方向）には接合線から遠ざかるのに従い急激に減衰するという特質より、  
 $\frac{\partial}{\partial \alpha} \ll \frac{\partial}{\partial \beta}$  であるから、(1)式において $\alpha$ の導関数に関する項を無視し、  
 $\varepsilon = \sqrt{G_x R_{II} / R_z^2}$  を微小パラメータにとり、解を  $\psi_{II} = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \psi_m^{\alpha}$  として、  
摂動法の議論に従い、 $\varepsilon$ の最低次の項をひろうと次の様になる。

$$\frac{\partial^2 \psi_m^{\alpha}}{\partial \beta^2} + \iota \Omega_m \frac{\partial \psi_m^{\alpha}}{\partial \beta} = 0 \quad (7)$$

ここで、 $\iota = \beta / \varepsilon$ 、 $\Omega_m$ は $\alpha$ 方向の法曲率を $R_{II}$ で除したものである。したがって(7)の解は、 $X_m, Y_m$ を積分定数として、次の様に表わされる。

$$\psi_m^{\alpha} = \exp(-\frac{\iota}{\sqrt{2}}) \left( \cos \frac{\iota}{\sqrt{2}} + \iota \sin \frac{\iota}{\sqrt{2}} \right) \sum_{n=0}^{\infty} (X_m + \iota Y_m) \cos m\varphi \quad (8)$$

境界層タイプの一般解(8)式から断面力、変形量等を導く式についても解を導いた時と同様に $\alpha$ 方向の導関数を無視すれば、次の様になる。ただし、 $A, B$ は各々 $\alpha$ 方向、 $\beta$ 方向のラーメのパラメータである。

$$Q_{\alpha\alpha}^{\alpha} = \frac{1}{A^2} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial}{\partial \beta} R_z \psi_m^{\alpha}, \quad Q_{\alpha\beta}^{\alpha} = \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} R_z \psi_m^{\alpha}, \quad Q_{\beta\alpha}^{\alpha} = -\frac{1}{AB} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} R_z \psi_m^{\alpha}, \quad F_{\alpha\alpha} C_{\alpha} K_{\alpha\alpha}^{\alpha} = \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} I_m \psi_m^{\alpha}, \quad \dots \quad (9)$$

一方、円筒シェルについては、攪乱応力状態を表わす応力関数として(1)式の非軸対称解を用いる。

$$\psi^{\beta} = \sum_{m=0}^{\infty} (C_m^{\beta} + \iota C_m^{\beta}) \exp(P_m \xi) (\cos d_m \xi + \iota \sin d_m \xi) \cos m\theta \quad (10)$$

ここで、 $C_m^{\beta}, C_m^{\beta}$ は積分定数、 $P_m = S(l+1)/2$ 、 $d_m = S(l+1)/2l$ 、 $l = \sqrt{4\psi + \sqrt{16\psi^2 + 1}}$ 、 $S = \sqrt{R_z / 2G_x}$   
(10)式より断面力、変形量等を求める式は、基本応力状態と同様に(4)式を用いる。

〔境界条件〕 基本応力状態を求めた時と同様に(8)、(10)式を各々(9)、(4)式に代入し、断面力、変形量の表示式を求める。円筒シェルの断面力、変形量の表示式及び基本応力状態については、局所座標系に変換し、重ね合わせを行ない次に示す境界条件によって(8)、(10)式に含まれる積分定数  $X_m, Y_m, C_m^{\beta}, C_m^{\beta}$  を決定する。

$$\hat{M}_{\alpha\alpha}^{\beta} = \hat{M}_{\alpha\alpha}^{\alpha} \quad \hat{Q}_{\alpha\alpha}^{\beta} + \hat{Q}_{\alpha\alpha}^{\alpha} = 0 \quad \hat{\varepsilon}_{\alpha\alpha}^{\beta} = \hat{\varepsilon}_{\alpha\alpha}^{\alpha} \quad \hat{K}_{\alpha\alpha}^{\beta} + \hat{K}_{\alpha\alpha}^{\alpha} = 0 \quad (11)$$

$$\text{ただし、} \hat{Q}_{\alpha\alpha}^{\beta} = \hat{Q}_{\alpha\alpha}^{\beta} \nu_x + \hat{Q}_{\alpha\alpha}^{\beta} t_x + \hat{Q}_{\alpha\alpha}^{\beta} n_x, \quad \hat{K}_{\alpha\alpha}^{\beta} = \hat{K}_{\alpha\alpha}^{\beta} \nu_x - \hat{K}_{\alpha\alpha}^{\beta} t_x + \hat{K}_{\alpha\alpha}^{\beta} n_x$$

$$\hat{Q}_{\alpha\alpha}^{\alpha} = -\hat{Q}_{\alpha\alpha}^{\alpha} \nu_x - \hat{Q}_{\alpha\alpha}^{\alpha} t_x - \hat{Q}_{\alpha\alpha}^{\alpha} n_x, \quad \hat{K}_{\alpha\alpha}^{\alpha} = -\hat{K}_{\alpha\alpha}^{\alpha} \nu_x + \hat{K}_{\alpha\alpha}^{\alpha} t_x - \hat{K}_{\alpha\alpha}^{\alpha} n_x$$

ここで、 $(\nu_x, t_x, n_x)$ 、 $(\nu_x, t_x, n_x)$ は各々、円筒シェル、球シェルの接合線における局所単位ベクトルである。(Fig 4 参照)

### 3. 数値計算

以上の考察で求めた境界条件式(11)を接合線の各点において逐次法により計算する。結局、(11)式は一英につき8個の独立な方程式となる。今回の計算では、フーリエ級数 $m = 6$ までとり、 $\varphi = 0^\circ \sim 180^\circ$ の範囲で15英を選んで行なった。この場合未知定数の数より、方程式の数の方が多く、最小二乗法を用いる事になる。なお、計算結果の詳細については、発表の際に述べる。

### 4. まとめ

境界層の理論は、その適用範囲を考慮して用いれば、断面力、変形量等が接合線に沿った座標系について表示され、しかも用いる応力関数が、比較的簡便な形である為、複雑な接合線をもつシェルどうしの接合部も比較的、容易に解析が行なえる。また計算精度に関しては、基本応力状態に左右され、実際の応力状態に近い様な基本応力状態を採用する事が望ましい。

(参考文献)

K.F.CHERNYKH Some Aspects of the Linear Theory of Shells (Theory of Shells)

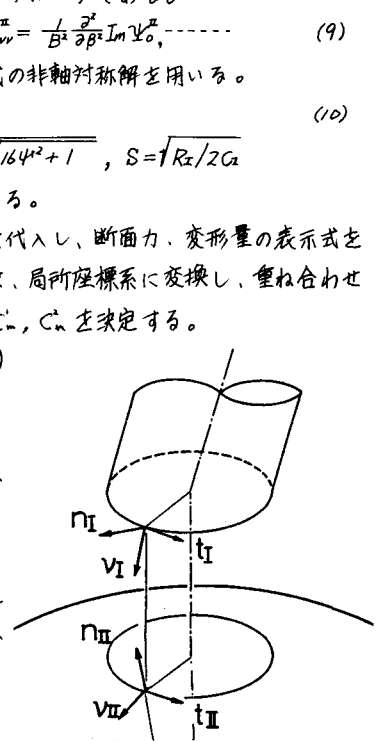
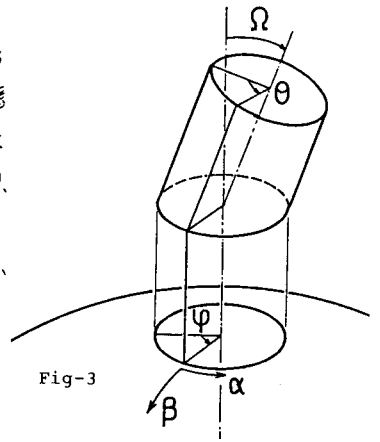


Fig-4 Local Coordinate Systems