

日本鋼管株) 正員 堀内 博
 北海道大学 正員 三上 隆
 北海道大学 正員 芳村 仁

1. はじめに 比較的厚い肉厚を有する円筒殻の一解析法として、選点法による解析(固有値問題、静的・動的問題に対する)を試み、その適用性、有効性の検討を行った。なお、殻理論は肉厚方向のせん断変形と回転慣性を考慮した Mindlin-Herrmann の理論¹⁾(以下 M-H 理論と記す)を用いた。

静的・動的問題に対する定式過程では、変形量、応力を精度よく求めるため領域分割を施し、各領域に選点法を適用した。その際、分割数の増加に伴う大次元行列演算を避けるため、数値計算アルゴリズムに考慮を払った。

2. 解析方法

1) 基礎式 M-H 理論によれば、円周方向 Fourier 級数展開後の運動方程式は、軸方向座標スに関する次の 2 階 5 项連立偏微分方程式で与えられる。

$$\begin{aligned} L_{11}(U) + L_{12}(V) + L_{13}(W) + L_{14}(\varphi_x) &= -P_u + a_1 \ddot{U} + a_2 \ddot{\varphi}_x \\ L_{21}(U) + L_{22}(V) + L_{23}(W) + L_{24}(\varphi_\theta) &= -P_v + a_3 \ddot{V} + a_4 \ddot{\varphi}_\theta \\ L_{31}(U) + L_{32}(V) + L_{33}(W) + L_{34}(\varphi_x) + L_{35}(\varphi_\theta) &= -P_w + a_5 \ddot{W} \\ L_{41}(U) + L_{42}(W) + L_{43}(\varphi_x) + L_{44}(\varphi_\theta) &= a_6 \ddot{U} + a_7 \ddot{\varphi}_x \\ L_{51}(V) + L_{52}(W) + L_{53}(\varphi_x) + L_{54}(\varphi_\theta) - a_8 \ddot{V} + a_9 \ddot{\varphi}_\theta &= \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 U, V, W = 軸、円周、肉厚方向の変位； $\varphi_x, \varphi_\theta$ = 軸、円周方向の回転角； $a_1 \sim a_9$ = 系数； P_u, P_v, P_w = 荷重； L_{ij} = 微分演算子； $(\cdot) = d(\cdot)/dt$ では次式で定義される無次元時間である。

$$\tau = (t \sqrt{E/S(1-\nu^2)}) / R \quad (2)$$

ここで、 E = 弾性係数； ν = 密度； R = 半径； ν = ポアソン比である。

2) 定式化

ここでは、動的問題に対する定式化過程を略述する。

図-1 に示すように、軸方向に沿って N 個の領域に分割し、①, ②, ③, ..., ⑩ を境界点と名付ける。各領域の未知関数 ($U, V, W, \varphi_x, \varphi_\theta$) を次のように表す。

$$(U, V, W, \varphi_x, \varphi_\theta) = \sum_{i=1}^{M+2} (a_i, b_i, c_i, d_i, e_i) x^{i-1} \quad (3)$$

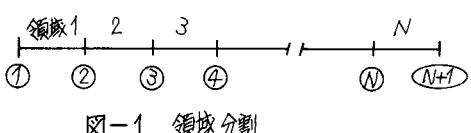


図-1 領域分割

式(3)で、 M は内部選点数を、 x_i は時間に沿する未知関数を表す。なお、選点は区間 [0, 1] で定義される $M \times$ shifted Legendre 多項式 $P_M^*(s)$ の零点を採用する。

本法による場合、考察している問題は連立方程式を解く問題に帰着されるが、その際数値計算の簡易化を計るために、内部選点 x_i ($i=1 \sim M$) と端点 ($x_0=0, x_{M+1}=1$) での肉数値を求める問題に変換する。そのため、未知関数の式に用いる 1, 2 階導関数を端点と内部選点での肉数値で結びつける関係式を用いる。たとえば、 U について示すと次式となる。

$$\{U''\} = [A]\{U\}, \{U'\} = [B]\{U\} \quad (4)$$

ここで、 $\{U''\}^T = (U''_{x_0}, U''_{x_1}, \dots, U''_{x_{M+1}})$, $\{U'\}^T = (U'_{x_0}, U'_{x_1}, \dots, U'_{x_{M+1}})$, $\{U\}^T = (U_{x_0}, U_{x_1}, \dots, U_{x_{M+1}})$, $[A]$ と $[B]$ はそれを表し、 $(M+2) \times (M+2)$ 次の行列である。

さて、 N 領域分割による $(5M+10)N$ 個の未知数に対する条件は次のように与えられる。まず、 $5MN$ 個の条件は、各領域の微分方程式の残差の条件より与えられる。

$$\left[\begin{smallmatrix} \alpha_c^{(k)} \\ \vdots \\ \alpha_s^{(k)} \end{smallmatrix} \right] \left\{ \begin{smallmatrix} \delta_c^{(k)} \\ \vdots \\ \delta_s^{(k)} \end{smallmatrix} \right\} + \left[\begin{smallmatrix} \beta_e^{(k)} \\ \vdots \\ \beta_s^{(k)} \end{smallmatrix} \right] \left\{ \begin{smallmatrix} \delta_e^{(k)} \\ \vdots \\ \delta_s^{(k)} \end{smallmatrix} \right\} = - \left[\begin{smallmatrix} P_u^{(k)} \\ \vdots \\ P_w^{(k)} \end{smallmatrix} \right] + \left[\begin{smallmatrix} \gamma_c^{(k)} \\ \vdots \\ \gamma_s^{(k)} \end{smallmatrix} \right] \quad (5)$$

ここで、添字 c, s は内部選点、端点に沿する行列、ベクトルを表わし、 (k) は各領域を表す。

境界点①と⑪で規定される境界条件より 10 個の条件が与えられ、次のように行列表示される。

$$\left[\begin{smallmatrix} \gamma_{c,1}^{(1)} \\ \vdots \\ \gamma_{s,1}^{(1)} \end{smallmatrix} \right] \left\{ \begin{smallmatrix} \delta_c^{(1)} \\ \vdots \\ \delta_s^{(1)} \end{smallmatrix} \right\} + \left[\begin{smallmatrix} \gamma_{e,1}^{(1)} \\ \vdots \\ \gamma_{s,1}^{(1)} \end{smallmatrix} \right] \left\{ \begin{smallmatrix} \delta_e^{(1)} \\ \vdots \\ \delta_s^{(1)} \end{smallmatrix} \right\} = \{0\} \quad (6)$$

$$\left[\begin{smallmatrix} \gamma_{c,M+1}^{(1)} \\ \vdots \\ \gamma_{s,M+1}^{(1)} \end{smallmatrix} \right] \left\{ \begin{smallmatrix} \delta_c^{(M+1)} \\ \vdots \\ \delta_s^{(M+1)} \end{smallmatrix} \right\} + \left[\begin{smallmatrix} \gamma_{e,M+1}^{(1)} \\ \vdots \\ \gamma_{s,M+1}^{(1)} \end{smallmatrix} \right] \left\{ \begin{smallmatrix} \delta_e^{(M+1)} \\ \vdots \\ \delta_s^{(M+1)} \end{smallmatrix} \right\} = \{0\}$$

ここで、 $[\delta_e^{(i)}]$ と $[\delta_{e0}^{(i)}]$ はそれぞれ $5 \times M$, 5×10 次の行列であり、添字、 \oplus ($i=1, N+1$) は境界点を表す。

残りの $10(N-1)$ 個の条件は、連続点での接続条件で与えられ、それらは次のように行列表示される。

$$[\delta_{e0}^{(i)}] \{ \delta_e^{(i-1)} \} + [\delta_e^{(i)}] \{ \delta_e^{(i-1)} \} + [\delta_e^{(i)}] \{ \delta_{e0}^{(i)} \} + [\delta_e^{(i)}] \{ \delta_{e0}^{(i)} \} = \{ 0 \} \quad (i=2 \sim N) \quad \cdots \cdots \quad (7)$$

ここで、 $[\delta_{e0}^{(i)}]$ と $[\delta_{e0}^{(i)}]$ はそれぞれ $10 \times 5M$, 10×10 次の行列である。また \oplus ($i=2 \sim N$) は連続点を表す。

3. 数値計算例

1) 固有値問題²⁾

高さと半径比 $L/R = 2$ の片持円筒殻の 1 次固有振動数に与えるせん断変形と回転慣性の影響を図-2 に示す。図が示すようにこれらは影響は厚さと半径の比 (h/R) および周方向波数 (n) が大きいとき著しい。なお、計算は $M=11$, $N=1$ (領域分割を行っていない)とした。

2) 静的・動的問題

(1) 静的問題 表-1 に軸方向に一様な荷重 (図-3) を受ける場合の、固定端の曲げモーメントを古典理論との比較で示す。なお計算は、 $M=11$, $N=4$ (等分割), $\nu=0.2$, $E=21 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ とし、また軸方向と周方向のせん断補正係数はそれぞれ $\beta^2/12$ とした。

表-1 $M_x(\text{kg cm}/\text{m})$ の比較

h/R	1/5	1/10	1/15	1/100
Present approach	1917	1040	713	112
Classical approach	2357	1179	786	118
Difference; %	17	12	9	5

(2) 動的問題 図-4 に示す荷重状態 ($n=1$, 軸方向には一定) に対する、固定端の曲げモーメント M_x の時間履歴を図-5 に示す。なお計算は $M=11$, $N=4$ (等分割) とし、時間方向の積分には Houbaht 法を用いた。せん断変形・回転慣性の応答に及ぼす影響は、立ち上がり部分において見られるものへの、定常状態ではほとんどない。

4. まとめ くくで掲示した解析手法は、他の形状の回転殻に対しても同様に、また比較的簡単な手続きで用いることができる、有効な解析手法になりうるものと思われる。

参考文献

- 1) J. Acous. Soc. Amer., Vol. 29, No. 10 (1957), p. 1116.

* 式 (5)~(7) は時間に関する $(5M+10)N$ 次のマトリック方程式であり、それらは初期条件を介して解くことができる。その際、主に大次元行列の演算を避けるため、まず境界点と連続点における未知量 ($10N$ 個) を決定し、次にそれらを用いて各領域の内部節点における未知量 ($5MN$ 個) を求めた。

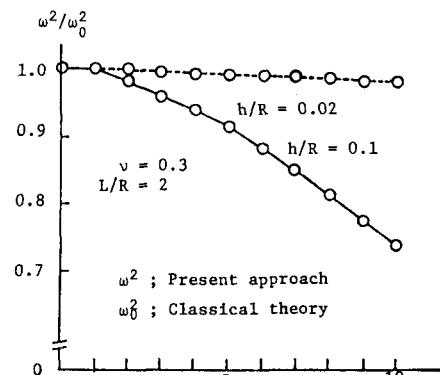


図-2 1次固有振動数に及ぼすせん断変形と回転慣性の影響

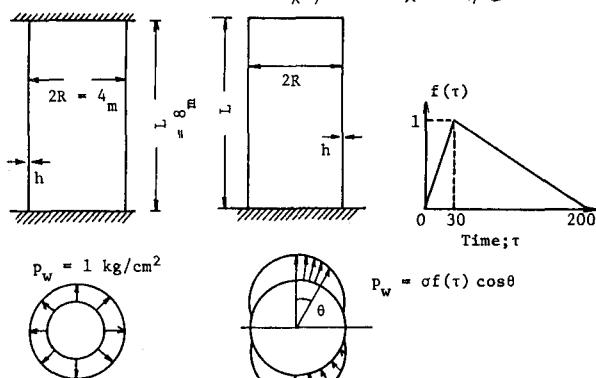


図-3 解析モデル(静的)

図-4 解析モデル(動的)

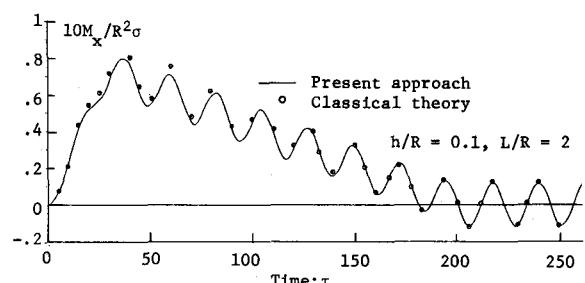


図-5 固定端での M_x の時間応答

2) 日本学会第35回年次学術講演会講演概要集, 第一部, 1980.

3) J. Aeronaut. Sci., Vol. 17 (1950), p. 540.