

北海道大学 正員 三上 隆
北海道大学 正員 芳村 仁

1. はじめに 著者は、選点法を薄肉回転殻の固有振動問題に適用し、その有効性や適用可能性について論じてきたが^{1), 2)}、ここでは主に固有振動数の検討に限定された。固有モードも、殻の動的特性に關する基本的な情報を提供するものであり、それゆえモードの精度を確認しておくことも必要と思われる。本報告はそのような観点から、円筒殻および球殻を対象とし、本手法によって求められる固有モードに検討を加えた。

2. 選点法の概略 Novozhilov の殻理論を用い、選点には区画 $[0, 1]$ で定義される shifted Legendre 多項式 $P_M^*(x)$ の零点を採用する。変位成分 (u = 経線方向, v = 周方向, w = 法線方向) を次式で表す。

$$\{u, v, w\} = \{h U(x) \cos n\theta, h V(x) \sin n\theta, h W(x) \cos n\theta\} e^{i\omega t} \quad (1)$$

ここに、 h = 厚さ, n = 周方向波数, ω = 固有振動数。

U と V および W をそれぞれ、 x に關する $(M+2)$ 次および $(M+4)$ 次の多項式で仮定する。それらの多項式に含まれる $(3M+8)$ 個の未知係数に対する条件は、運動方程式の残差の条件および境界条件で与えられ、それぞれ次式で表わされる。

$$[\alpha_1] \{\delta_1\} + [\alpha_2] \{\delta_2\} = \lambda^2 \{\delta_1\} \quad (2)$$

$$[\beta_1] \{\delta_1\} + [\beta_2] \{\delta_2\} = \{0\} \quad (3)$$

ここに、 λ^2 = 振動数パラメータ。上式中の行列は、運動方程式に現われる $1 \sim 4$ 階導関数と選点 x_j ($j=1 \sim M$) および端点 ($x_0=0, x_{M+1}=1$) における変位成分の値を結びつける行列²⁾の成分で構成されている。

さて、選点法による回転殻の固有値問題は式 (2), (3) より次式で定義される。

$$([\alpha_1] - [\alpha_2][\beta_1]^{-1}[\beta_2])\{\delta_1\} = \lambda^2 \{\delta_1\} \quad (4)$$

ここに、 $\{\delta_1\}^T = (U_{x1} \sim U_{xM}, V_{x1} \sim V_{xM}, W_{x1} \sim W_{xM})$

3. 数値計算例 Fig. 1 に示す円筒殻と球殻を解析する。ただし、球殻は軸対称振動の場合を扱い、選点数は $M=11$ とした。

(1) 円筒殻 片持円筒殻の諸元は $L/a = 2.16$, $h/a = 0.01$, ν (ポアソン比) = 0.3 である。

Fig. 2 は、 $n=1$, m (軸方向モード次数) = 1 ~ 3 に対する変形モードを正解と比較したものである。図が示すように、本手法によって得られたモードは正解とよく一致している。なお、参考のために図には mn 次の無次元固有振動数を $\Omega_{mn} = \omega a \sqrt{\rho/E}$ の形で示して置いた。 E = 弾性係数 ρ = 密度。*

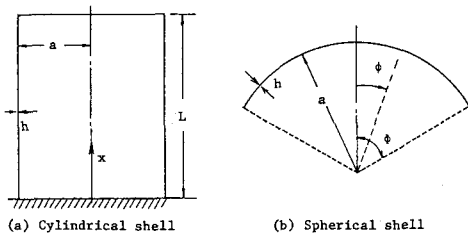


Fig. 1 Shells used for numerical studies

* 次に本手法によって求められる固有モードの直交性について述べる。直交性の検証は次式を用いてなされる。

$$\tilde{I} = \iint_S [U_{mn} U_{sn} + V_{mn} V_{sn} + W_{mn} W_{sn}] a dx d\theta = (\pi a L h^2) \cdot I \quad (5)$$

ここで、 U_{mn} , V_{sn} などは mn 次, sn 次 (m, n は経線方向モード次数, n は周方向波数) の固有モードを表わし、 I は次式で与えられる。

$$I = \int_0^1 [U_{mn} U_{sn} + V_{mn} V_{sn} + W_{mn} W_{sn}] dx \quad (6)$$

したがって、ここでは I の値を直交性の指標とし、 $m \neq s$ で $I=0$, $m=s$ で $I \neq 0$ の関係が成り立つかどうかを

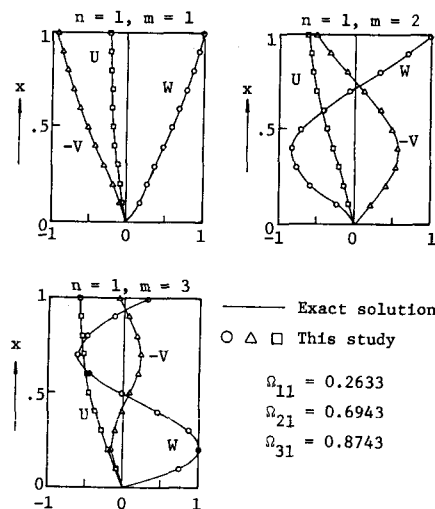


Fig. 2 Mode shapes of cylindrical shell

$$\begin{aligned} \Omega_{11} &= 0.2633 \\ \Omega_{21} &= 0.6943 \\ \Omega_{31} &= 0.8743 \end{aligned}$$

数値的に調べる。

Table 1に $m=1, 3, 5, 8, 10$ に対する経線方向モード次数5次までの Γ の値を示す。 $m \neq s$ での Γ の値は、ほぼ零の値を示しており、本手法によって得られる固有モードの直交性は十分な精度で成立していることがわかる。なお、 Γ の計算には Gauss 24 点積分法を用いた。

(2) 球殻 球殻の自由振動問題の解析的な研究は数多くなされ、また固有振動数および固有モードを正しく求めることの困難さもよく知られている。^{3~8)} として、その困難さは、球殻の運動方程式の特性値と解を構成する特殊関数の取扱いや使用計算機の精度に起因して固有振動数の見落としとして現われている。ここでは、欠落した固有振動数に対応する固有モードに着目し、本手法と他の近似手法で得られた結果の比較を行う。解析モデルは $\nu/\alpha=0.05$, $\theta=60^\circ$, $U=0.3$ である。

Fig. 3にTable 2で欠落している固有振動数に対するモードを、FEM(曲線要素)値⁴⁾との比較で示す。図が示すように十分良好な結果が得られた。また回転支持に対する結果(Fig. 3b)は、Cohen⁵⁾の Stodola法の結果(図では示していない)とも良好な一致がみられた。Fig. 4は、移動支持の場合の変形モードである。本手法の結果($\Omega=2.546$)は、Ross⁶⁾の Legendre 関数の漸近展開に基づく結果とほぼ一致している。なお、Kalinins³⁾の値は Rossが指通しているように、曲げの寄りのない Membrane モードと思われる。

4. まとめ

ここで例示した数値例からわかるように、本手法により得られた固有モードは既往研究の結果とよく一致した。また、固有モード間の直交性も保たれることが、数値的に確認できた。

参考文献

- 1) 土木学会誌, 1980, p.116.
- 2) J.N.C.T.M., Vol.30(1981), P.323.
- 3) J. Acoust. Soc. Am., Vol.38(1964), p.174.
- 4) AIAA J., Vol.4(1966), p.2052.
- 5) AIAA J., Vol.3(1965), p.2305.
- 6) J. Appl. Mech., Vol.36(1969), p.553.

- 7) AIAA J., Vol.4(1966), p.1370.
- 8) Trans. of A.I. J., No.325(1983), p.57.

Table 1 Values of Γ

$n \setminus m$	1	2	3	4	5
1	0.77	-0.92(-6)	0.86(-4)	0.14(-4)	-0.34(-4)
2		0.69	-0.16(-3)	-0.27(-4)	0.40(-4)
3			0.57	0.93(-4)	-0.14(-3)
4				0.67	-0.27(-4)
5					0.31
1	0.32	-0.99(-6)	0.22(-4)	-0.22(-4)	0.16(-4)
2		0.43	-0.14(-3)	0.12(-3)	-0.17(-3)
3			0.44	-0.27(-3)	0.34(-3)
4				0.46	-0.44(-3)
5					0.41
1	0.28	-0.52(-4)	0.23(-4)	-0.25(-4)	0.16(-4)
2		0.35	-0.49(-5)	0.36(-4)	-0.11(-3)
3			0.39	-0.16(-3)	0.32(-3)
4				0.43	-0.50(-3)
5					0.43
1	0.27	-0.15(-3)	0.51(-4)	-0.41(-4)	0.19(-4)
2		0.32	0.50(-4)	-0.27(-4)	0.37(-5)
3			0.35	0.75(-5)	0.56(-4)
4				0.39	-0.15(-3)
5					0.42
1	0.28	-0.11(-3)	0.42(-4)	-0.31(-4)	-0.48(-5)
2		0.35	0.23(-4)	-0.35(-4)	0.64(-4)
3			0.35	0.95(-4)	-0.11(-3)
4				0.37	0.44(-4)
5					0.40

(-a) = $\times 10^{-a}$

Table 2 Natural frequencies, $\Omega = \omega a (\rho/E)^{1/2}$

m	FEM	Kalinins	This study
Clamped boundary			
1	1.008	1.006	1.006
2	1.395	1.391	1.391
3	1.702	missed	1.696
4	2.387	2.375	2.375
5	3.506	3.486	3.487
Fixed-hinged boundary			
1	0.963	0.962	0.960
2	1.338	1.334	1.332
3	1.653	missed	1.650
4	2.131	2.128	2.128
5	3.185	3.176	3.175

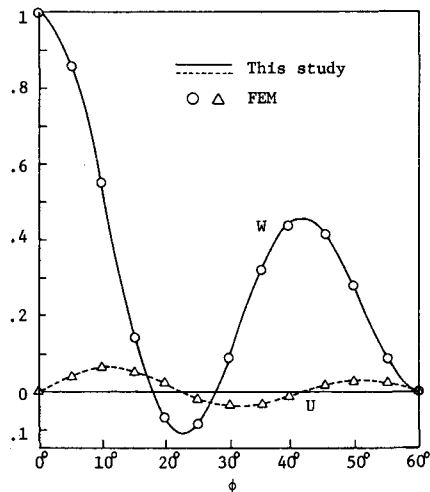


Fig. 3a Mode shape for clamped edge, $\Omega = 1.696$

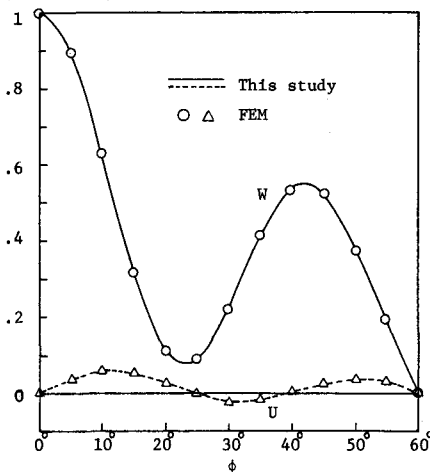


Fig. 3b Mode shape for fixed-hinged edge, $\Omega = 1.650$

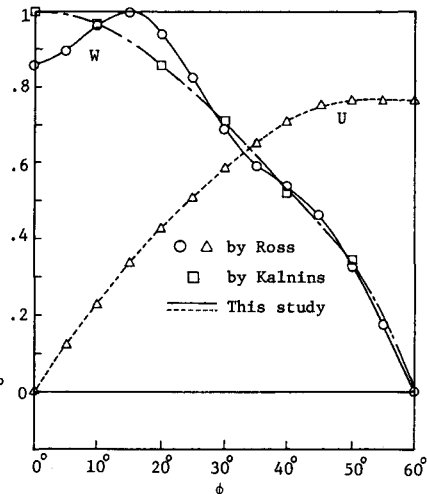


Fig. 4 Mode shape for roller-hinged edge, $\Omega = 2.546$