

大同工業大学 正会員 水澤富作  
名古屋大学 正会員 梶田建夫

1. はじめに 有限帯板法が Y.K. Cheung らにより提案されてからスルが、その後種々の改良や応用が行われて現在では構造解析手法の一つとしてほぼ確立されたものとなっている。(しかし、適用する問題によっては、解析精度や経済性などについて検討すべき点が多く残っているように思われる。たとえば、弾塑性解析とか、ここで取りあげる斜板のような問題である。これらの問題では有限帯板法の大きな特徴である級数の直交性が利用できなくなるという点から、有限帯板法の適用する二つの利点が少なくなる。しかしながら、次元数を一つ下げることができるといふ点でその有用性は残されていると思われる。

斜板の曲げ解析への有限帯板法の適用を行った研究があるが、解析精度を高めるために、多くの帯板分割で級数項を取ると、未知数が多くなってしまふことより、あまり精度のよい結果は得られていない。

著者らは<sup>2)</sup>、高次の連続性をもつ B-SPLINE 関数を区分的領域の基底関数として用いた離散化手法 (SPLINE 要素法) により、斜板に関する一連の研究を行ってきた。最近、Cheung ら<sup>3)</sup>、この B-SPLINE 関数を用いた SPLINE 有限帯板法を提案し、長方形板や箱桁の曲げ解析に適用している。Cheung らの SPLINE 有限帯板法では、帯板の長手方向の基底関数に 3 次の B-SPLINE 関数を使用し、その横方向には 3 次の多項式を用いている。

本文では、B-SPLINE 関数で Fourier 級数を用いた SPLINE 帯板法について提案し、斜角性斜板の曲げおよび自由振動解析への適用について述べる。

2. SPLINE 帯板法による定式化 斜板の離散化要素として、Fig. 1 に示すような斜帯板要素を考える。

この帯板要素の座標関数として、 $\eta$  軸方向には、はりの固有関数  $Y_m(\eta)$  を使用し、また、 $x$  軸方向に B-SPLINE 関数  $S(x)$  を用いる。したがって、この帯板要素の変位関数は、

$$w = \sum_{m=1}^r S(x) Y_m(\eta) \quad \dots (1)$$

ただし、SPLINE 関数は、次のように定義される。

$$S(x) = \sum_{n=1}^{ix} C_n N_{n,k}(x), \quad ix = k + M_x - 1 \quad \dots (2)$$

ここで、 $N_{n,k}(x)$  は正規化された B-SPLINE 関数、 $k-1$  は SPLINE 次数、 $M_x$  は帯板の数、また  $C_m$  は B-SPLINE 関数の係数パラメータである。(したがって、式 (2) を式 (1) に代入すると、

$$W_{mm}(x, y) = \sum_{m=1}^r \sum_{n=1}^{ix} C_{mn} N_{n,k}(x) Y_m(\eta) = \sum_{m=1}^r [\phi] Y_m(\eta) \{\delta\}_m$$

ここで、 $[\phi] = [N_{1,k}(x) \ N_{2,k}(x) \ \dots \ N_{ix,k}(x)]$ ,  $\dots (3)$

$\{\delta\}^T = \{C_{m1} \ C_{m2} \ \dots \ C_{m,ix}\}$  であり、 $r$  は級数項である。

帯板要素  $j$  における B-SPLINE 関数が Fig. 1 に示されているが、従来の有限帯板法で果なり、節線パラメータの代わりに、SPLINE 帯板法では、この帯板内で使用される B-SPLINE 関数の係数パラメータを未知数として用いる。

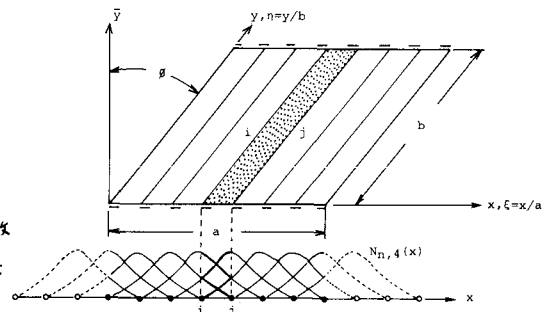


Fig. 1 spline strip idealization for skew plate.

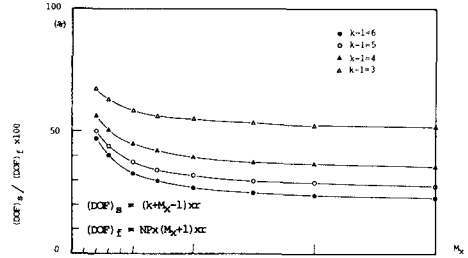


Fig. 2 Comparison of the total number of degrees of freedom by the spline strip method compared with ordinary finite strip method which has several nodal line parameters such as  $W$ ,  $\theta_x$ ,  $\theta_y$ , etc.

参考文献 1). Y.K. Cheung, 'Finite strip method in structural analysis', Pergamon Press, 1976.

2). 水澤, 梶田, 成田, 'B-spline関数を用いた斜板の自由振動解析について', 土木学会論文報告集, No. 272, pp. 131-134.

3). Y.K. Cheung, S.C. Fan and C.Q. Wu, 'Spline finite strip in structural analysis', Proc. of Int. Conf. on Finite Element Methods, 2-6 August, Shanghai, China, pp. 704-709, 1982.

等角斜板のひずみエネルギー  $U$ 、運動エネルギー  $T$  および等分布荷重による外力ポテンシャル  $V$  はそれぞれ  
 無次元の斜角座標  $(\xi, \eta)$  で示す、次のように表わされる。  
 $U = (D/2) \sec^3 \theta (b/a^3) \int_0^1 \int_0^1 [ (\partial^2 w / \partial \xi^2$   
 $- 2\lambda \sin \theta \partial^2 w / \partial \xi \partial \eta + \lambda^2 \partial^2 w / \partial \eta^2)^2 - 2(1-\nu) \lambda^2 \cos^2 \theta (\partial^2 w / \partial \xi^2 \partial^2 w / \partial \eta^2 - (\partial^2 w / \partial \xi \partial \eta)^2) ] d\xi d\eta \dots (4)$ ,  $T = (1/2) \rho h a b \omega^2 \cos \theta$   
 $\times \int_0^1 \int_0^1 w^2 d\xi d\eta \dots (5)$ ,  $V = (1/2) a b \cos \theta \int_0^1 \int_0^1 q w d\xi d\eta \dots (6)$ 。ここで、 $\theta$  は斜角、 $D$  は板剛度、 $\lambda$  はポア  
 ソン比、 $h$  は板厚、 $\rho$  は密度、 $q$  は等分布荷重強度、また  $\omega$  は円振動数である。 $\eta = a/b$ ,  $\xi = x/a$ ,  $\eta = y/b$ 。

式(1)で定義した変位関数において、SPLINE 関数  $S(x)$  は与えられた境界条件を満たさない変位の関数である  
 ので、一般的境界条件の取り扱いを考慮して、假想はね法<sup>2)</sup>を用いる。すなわち、与えられた幾何学的境界条  
 件に相当する假想のはねを導入し、たわみ  $w$  と回転角  $\partial w / \partial \xi$  に対応する假想はねの定数をそれぞれ  $\alpha$ 、 $\beta$  とす  
 る。この假想のはねによるひずみエネルギー  $U_b$  は、次のように表わされる。

$$U_b = (1/2) [ \int_0^1 ( \alpha w^2 + (\beta/a^2) (\partial w / \partial \xi)^2 ) |_{\xi=0} d\eta + \int_0^1 ( \alpha w^2 + (\beta/a^2) (\partial w / \partial \xi)^2 ) |_{\xi=1} d\eta ] \dots (7)$$

したがって、この斜板の全ポテンシャルエネルギー  $\Pi$  は、 $\Pi = U + U_b - T - V \dots (8)$  で与えられる。

式(3)を上式に代入し、これにエネルギー変分法を適用すれば、曲げ問題および自由振動問題が容易に定式化  
 される。

図2には、帯板の分割数を同じにしてみた場合での、従来の  
 の有限帯板法の条の未知数に対する本手法の自由度数の比較  
 について示した。これより、本手法では、従来の有限帯板  
 法と比較して、未知数を半分以下に低減することが可能で  
 ある。

Table 1. The effect of the number of strips on the results of skew plate ( $A=1.0$  and  $\nu=0.3$ ) with two parallel edges simply supported and the other two free to uniform load  $q$ .  $k=1$  and  $r=1$

| Skew angle<br>$\theta$    | Number of<br>strips<br>$M_x$ | Order of<br>matrix<br>(DOF) | $w$<br>( $a/2, a/2$ ) (0, $a/2$ ) | $w$<br>( $a/2, a/2$ ) (0, $a/2$ ) | $M_1$<br>( $a/2, a/2$ ) | $M_2$<br>( $a/2, a/2$ ) | $M_3$<br>(0, $a/2$ ) |
|---------------------------|------------------------------|-----------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|-------------------------|-------------------------|----------------------|
| 0°                        | 2                            | 55                          | 1.3119                            | 1.5015                            | 1.244                   | 3.289                   | 1.333                |
|                           | 4                            | 77                          | 1.3095                            | 1.5012                            | 1.228                   | 2.803                   | 1.318                |
|                           | 6                            | 99                          | 1.3094                            | 1.5011                            | 1.227                   | 2.753                   | 1.314                |
|                           | 8                            | 121                         | 1.3094                            | 1.5011                            | 1.226                   | 2.733                   | 1.313                |
|                           | 10                           | 143                         | 1.3094                            | 1.5011                            | 1.226                   | 2.724                   | 1.312                |
|                           | 12                           | 165                         | 1.3094                            | 1.5011                            | 1.226                   | 2.718                   | 1.311                |
| Timoshenko's values       |                              |                             | 1.309                             | 1.509                             | 1.225                   | 2.71                    | 1.318                |
| 30°                       | 2                            | 55                          | 0.7834                            | 0.9819                            | 0.9681                  | 1.762                   | 0.9739               |
|                           | 4                            | 77                          | 0.7885                            | 0.9888                            | 0.9627                  | 1.701                   | 0.9658               |
|                           | 6                            | 99                          | 0.7893                            | 0.9907                            | 0.9574                  | 1.654                   | 0.9727               |
|                           | 8                            | 121                         | 0.7896                            | 0.9914                            | 0.9611                  | 1.660                   | 0.9737               |
|                           | 10                           | 143                         | 0.7897                            | 0.9917                            | 0.9579                  | 1.627                   | 0.9734               |
|                           | 12                           | 165                         | 0.7898                            | 0.9919                            | 0.9584                  | 1.629                   | 0.9731               |
| Spline Element Method 324 |                              |                             | 0.7909                            | 0.9989                            | 0.9619                  | -                       | 0.9321               |
| 45°                       | 2                            | 55                          | 0.3748                            | 0.5541                            | 0.6635                  | 0.04952                 | 0.6179               |
|                           | 4                            | 77                          | 0.3839                            | 0.5701                            | 0.6707                  | 0.05364                 | 0.6287               |
|                           | 6                            | 99                          | 0.3869                            | 0.5761                            | 0.6711                  | 0.05629                 | 0.6499               |
|                           | 8                            | 121                         | 0.3861                            | 0.5786                            | 0.6835                  | 0.06322                 | 0.6538               |
|                           | 10                           | 143                         | 0.3886                            | 0.5787                            | 0.6762                  | 0.05788                 | 0.6518               |
|                           | 12                           | 165                         | 0.3889                            | 0.5803                            | 0.6764                  | 0.05803                 | 0.6485               |
| Spline Element Method 324 |                              |                             | 0.3925                            | 0.5973                            | 0.6886                  | -                       | 0.5917               |
| Multipliers               |                              |                             | ( $10^{-2} q a^4 / D$ )           |                                   |                         |                         |                      |

Table 2. The effect of increment of series terms in basic functions,  $r$  on natural frequency parameter of skew plate ( $\lambda=1.0$ ) with two parallel edges simply supported and the other two free.  $k=1$  and  $M_x=4$

| Skew angle<br>$\theta$    | Number of<br>series<br>$r$   | Order of<br>matrix<br>(DOF) | 1st     | 2nd    | 3rd    | 4th    | 5th    |
|---------------------------|------------------------------|-----------------------------|---------|--------|--------|--------|--------|
| 0°                        | 1                            | 10                          | 0.97586 | 1.6348 | 3.7211 | -      | -      |
|                           | 3                            | 30                          | 0.97586 | 1.6348 | 3.7211 | 3.9460 | 4.7356 |
|                           | Leissa's Values              |                             | 0.97586 | 1.6348 | 3.7211 | 3.9460 | 4.7356 |
|                           | FSM(4DOF) (8 strips, $r=1$ ) | 16                          | 0.9766  | 1.636  | 3.723  | -      | -      |
| 30°                       | 1                            | 10                          | 1.262   | 2.468  | -      | 5.575  | -      |
|                           | 3                            | 30                          | 1.240   | 1.925  | 3.801  | 5.088  | 6.594  |
|                           | 9                            | 90                          | 1.234   | 1.840  | 3.705  | 5.030  | 6.306  |
|                           | 15                           | 150                         | 1.233   | 1.822  | 3.685  | 5.021  | 6.269  |
|                           | 21                           | 210                         | 1.232   | 1.815  | 3.676  | 5.017  | 6.254  |
|                           | FSM(4DOF) (8 strips, $r=1$ ) | 16                          | 1.263   | 2.469  | -      | 5.577  | -      |
| 45°                       | 1                            | 10                          | 1.818   | 4.081  | -      | 9.188  | -      |
|                           | 3                            | 30                          | 1.728   | 2.464  | 4.538  | 7.130  | 9.520  |
|                           | 9                            | 90                          | 1.685   | 2.207  | 4.174  | 6.301  | 8.242  |
|                           | 15                           | 150                         | 1.678   | 2.157  | 4.117  | 6.208  | 8.148  |
|                           | 21                           | 210                         | 1.673   | 2.121  | 4.075  | 6.143  | 8.086  |
|                           | FSM(4DOF) (8 strips, $r=1$ ) | 16                          | 1.820   | 4.056  | -      | 9.193  | -      |
| FSM(12DOF) (mesh: 8x8)    |                              |                             | 2.404   | 2.114  | 3.954  | -      | -      |
| Spline Element Method 256 |                              |                             | 1.663   | 2.068  | 4.017  | 6.046  | 7.986  |

3. 数値計算例 および提案  
 本数値計算例では、帯板要素の両端での境界条件が単純交  
 持された場合について検討を行う。したがって、基底関数  
 $Y_m(\eta)$  は、 $Y_m(\eta) = \sin(m\pi\eta/b)$  .... (9)  
 で与えられる。ここで、 $b$  は帯板の長さである。  
 a) 等分布荷重を受ける斜板の曲げ解析 Table 1で  
 は、相対する2辺がそれぞれ自由で単純支持された斜板のた  
 わみと主モーメントの収束性に与える帯板の数、 $M_x$  の影響が  
 示されている。これより、帯板の数を増すと、たわみについ  
 ては一様な収束性が示されているが、主モーメントは、斜角  
 が入ってくるでかなりしも一様な収束性を示さない。これ  
 は、基底関数として用いたばりの固有関数の性質によるもの  
 で与えられる。

b) 斜板の自由振動解析 SPLINE 板法による自由振  
 動解析では、振動数パラメータ、 $M = \frac{\omega^2 a^4}{\pi^2} \sqrt{\rho h / D}$  の収束性に与  
 える SPLINE 次数で帯板の数による影響がさほど大きくないの  
 で、Table 2 には、 $M$  の収束性に与える級数項の影響につい  
 て示した。これより、級数項を増すと、斜角の増大に対しても安定した一様な収束状態が得られた。

4. おわりに 斜板解析への有限帯板法の適用にあたっては、級数の直交性が得られないので、一般に  
 条の未知数が増大してくる。SPLINE 帯板法では、同一の帯板の数であれば、従来の有限帯板法と比較して未知数  
 を大幅に低減することができ、SPLINE 次数を変化させることにより容易に高次の帯板要素を作り出すことがで  
 きる。斜板の曲げおよび自由振動解析より、安定した収束性と精度が得られた。