

山口測量設計(株) の難波 典年  
 大阪市立大学 園田 恵一郎  
 大阪市立大学 堀川 都志雄

1. はしがき 中等厚板理論は薄板理論から次元厚板理論への橋渡しのなものであり、板厚方向のせん断ひずみや板厚方向の直ひずみを考慮する等の仮定に基づいて誘導されているために、これまで多くの研究者例えば、Love, Reissner, Mindlin, Kromm, La, Panc, 平嶋, Ambartsumyan, 園田 等によって議論が展開されている<sup>1), 2)</sup>。発表された計算例に注目すると、主にある特定の荷重状態であるかあるいは2重級数による方法に限られている。一方、パソコン等の小容量計算機の普及は近年目覚ましいものがあり、記憶容量の増大ならびに演算時間の高速化が予想され、今後設計の分野での利用率も一層高まるであろうと推察される。そこで、このようなパソコンによって中等厚板を解析する場合、演算時間の短縮化が課題の1つとしてあげられる。従って、薄板理論でのNavierタイプによる計算方法を採用することは極めて不利であろうと思われる。これまで、等方性板についてはGoldberg が、直交異方性板ではAmbartsumyan が単級数いわゆるLevyタイプの解を発表しているが、いずれの場合も等分布満載荷重に限定されており、部分荷重等については何う言及されていない。

本研究は、園田等による直交異方性中等厚板理論の補助関数に総和公式を適用することによって、①部分荷重に対する代数解(閉じた解)を誘導し、②中等厚板理論のLevyタイプの解を示すものである。

## 2. 理論式

中等厚板の解析は曲げ問題と引張り問題の2つに分離され、それぞれに対する補助関数およびたわみ $w$ 、断面力 $Q_x$ の式は以下のように示される。

### ○曲げ問題

$$\begin{aligned} & \left\{ D_{11} \partial_x^4 + 2D_{12} \partial_x^2 \partial_y^2 + D_{22} \partial_y^4 - D_{11} E'_{23} \partial_x^2 + \{ D_{11}(E_{22} - E_{12} - E_{23}) + D_{12}(E_{11} - E'_{12}) \} \partial_x^2 \partial_y^2 \right. \\ & \quad \left. - \{ D_{12}(E_{22} - E_{12}) + D_{22}(E_{11} - E'_{12} - E'_{23}) \} \partial_x^2 \partial_y^2 - D_{22} E_{23} \partial_y^2 \right\} \Phi^0 = -X^0 \\ & w = \partial_x \left\{ E'_{23} \partial_x^2 + (E_{22} - E_{12} - E_{23}) \partial_y^2 - 1 \right\} \Phi_1^0 + \partial_y \left\{ (E_{11} - E'_{12} - E'_{23}) \partial_x^2 + E_{23} \partial_y^2 - 1 \right\} \Phi_2^0 \\ & \quad + \left\{ E_{11} E'_{23} \partial_x^4 + \{ E_{11} E_{22} + E_{23} E'_{23} - (E_{12} + E_{23}) E'_{12} + E'_{23} \} \partial_x^2 \partial_y^2 + E_{22} E_{23} \partial_y^4 - (E_{11} + E'_{23}) \partial_x^2 - (E_{22} + E_{23}) \partial_y^2 + 1 \right\} \Phi_3^0, \\ & Q_x = -\partial_y^2 \left\{ D_{12} \partial_x^2 + D_{22} \partial_y^2 \right\} \Phi_1^0 + \partial_x \partial_y \left\{ D_{11} \partial_x^2 + D_{12} \partial_y^2 \right\} \Phi_2^0 \\ & \quad + \partial_x \left\{ D_{11} E'_{23} \partial_x^2 + (D_{11} E_{22} - D_{12} E'_{12}) \partial_x^2 \partial_y^2 + \{ D_{12} E_{22} - D_{22}(E'_{12} + E'_{23}) \} \partial_y^2 - (D_{11} \partial_x^2 + D_{12} \partial_y^2) \right\} \Phi_3^0 \quad \text{--- (1)} \end{aligned}$$

ここで、 $\Phi^0 = \Phi_1^0 \mathcal{L} + \Phi_2^0 \mathcal{J} + \Phi_3^0 \mathcal{K}$ ,  $X^0 = X_1^0 \mathcal{L} + X_2^0 \mathcal{J} + X_3^0 \mathcal{K}$ .

### ○引張り問題

$$\begin{aligned} & \left\{ G_{11} G_{21} \partial_x^4 + (G_{11} G_{22} - 2G_{12} G_{21} - G_{12}^2) \partial_x^2 \partial_y^2 + G_{21} G_{22} \partial_y^4 \right\} \Psi^0 = -Y^0, \\ & U_0 = (G_{21} \partial_x^2 + G_{22} \partial_y^2) \Psi_1^0 - (G_{12} + G_{21}) \partial_x \partial_y \Psi_2^0, \quad V_0 = -(G_{21} + G_{12}) \partial_x \partial_y \Psi_1^0 + (G_{11} \partial_x^2 + G_{21} \partial_y^2) \Psi_2^0 \quad \text{--- (2)} \end{aligned}$$

ここで、 $\Psi^0 = \Psi_1^0 \mathcal{L} + \Psi_2^0 \mathcal{J}$ ,  $Y^0 = Y_1^0 \mathcal{L} + Y_2^0 \mathcal{J}$

次に、Levyタイプの解を誘導するために、式(1)で $y$ に関する微分項を無視すると、式(1)は

$$\begin{aligned} & \left\{ D_{11} \partial_x^4 - D_{11} E'_{23} \partial_x^2 \right\} \Phi_s^0 = -X_s^0, \quad Q_x = \partial_x^3 \left\{ D_{11} E'_{23} \partial_x^2 - D_{11} \right\} \Phi_{s2}^0, \\ & w = \partial_x \left\{ E'_{23} \partial_x^2 - 1 \right\} \Phi_{s1}^0 + \left\{ E_{11} E'_{23} \partial_x^4 - (E_{11} + E'_{23}) \partial_x^2 + 1 \right\} \Phi_{s2}^0 \quad \text{--- (3)} \end{aligned}$$

ここで、 $\Phi_s^0 = \Phi_{s1}^0 \mathcal{L} + \Phi_{s2}^0 \mathcal{J}$ ,  $X_s^0 = X_{s1}^0 \mathcal{L} + X_{s2}^0 \mathcal{J}$ ,  $X_{s1}^0 = \frac{h}{2} t x p - \frac{h}{12} E_{11} \partial_x^2 t x p - E_{33} \partial_x (g_m - \frac{h}{12} \partial_x t x p)$ ,  $X_{s2}^0 = g_m$ .

式(3)にフーリエ級数を適用し、さらに表-1の総和公式を用いて部分鉛直荷重が作用する場合(図-1)の結果を以下に示す。

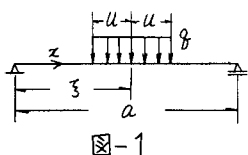


表-1 総和公式

|                                               |                                            |
|-----------------------------------------------|--------------------------------------------|
| $\sum_{m=1,2}^{\infty} \frac{1}{m^5} \sin mX$ | $\frac{\pi^5}{720} X (8-20X^2+15X^3-3X^4)$ |
| $\sum_{m=1,2}^{\infty} \frac{1}{m^3} \sin mX$ | $\frac{\pi^3}{12} X (2-3X+X^2)$            |

曲げおよび引張り問題に対してそれぞれ次の3つの領域で区分される。ただし、 $\xi = \xi/a$ ,  $u = u/a$ ,  $x = z/a$

$0 \leq x \leq \xi - u$ :

$$W = \frac{8a^4}{3D_{11}} \left[ (2\xi u - 3\xi^2 u - u^3 + \xi^3 u + \xi u^3) x - (u - \xi u) x^3 \right] + \frac{E_{11}}{D_{11}} 2ga^2 [(u - \xi u) x] - \frac{F_{33}}{D_{11}} 2ga^2 [(u - \xi u) x],$$

$$u_0 = -\frac{a_{13}}{a_{11}} ga(u - \xi u)$$

$\xi - u \leq x \leq \xi + u$ :

$$W = \frac{8a^4}{24D_{11}} \left\{ (\xi - u)^4 + 4 \left[ 4\xi u - (\xi + u)^3 + 2\xi^3 u + 2\xi u^3 \right] x + 6(\xi - u)^2 x^2 - 4 \left[ \xi + u - 2\xi u \right] x^3 + x^4 \right\}$$

$$+ \frac{E_{11}}{D_{11}} \frac{8a^2}{2} \left\{ -(\xi - u)^2 + 2 \left[ (\xi + u)^2 - 2\xi u \right] x - x^2 \right\} - \frac{F_{33}}{D_{11}} \frac{8a^2}{2} \left\{ -(\xi - u)^2 + 2 \left[ (\xi + u)^2 - 2\xi u \right] x - x^2 \right\},$$

$$u_0 = -\frac{a_{13}}{a_{11}} \frac{8a}{2} \left\{ (\xi + u - 2\xi u) - x \right\}$$

$\xi + u \leq x \leq 1$ :

$$W = \frac{8a^4}{3D_{11}} \left\{ -(\xi^3 u + \xi u^3) + (2\xi u + \xi^3 u + \xi u^3) x - 3\xi u x^2 + \xi u x^3 \right\} + \frac{E_{11}}{D_{11}} 2ga^2 [\xi u - \xi u x] - \frac{F_{33}}{D_{11}} 2ga^2 [\xi u - \xi u x],$$

$$u_0 = \frac{a_{13}}{a_{11}} ga(\xi u) \quad (4)$$

等分布荷重の場合:  $W = \frac{8a^4}{24D_{11}} (x^4 - 2x^3 + x) + \frac{E_{11}}{2D_{11}} (x - x^2) - \frac{F_{33}}{2D_{11}} (x - x^2)$  となり、才1項ははり理論による項であり、才2, 3項はそれぞれせん断応力 $\tau_{xz}$  および垂直応力 $\sigma_z$  による影響項を示している。

集中荷重が作用する場合には、荷重強度 $q$ を $P/2u$ , 荷重幅 $u$ を要とすればよい。

### 3板問題への適用

式(4)で得られた解を特解、式(1), (2)の補助関数から同次解を導き、さらにそれらを重合せることによって一般解が得られる。例えば、たわみに関する同次解は

$$W = \sum_m \left\{ W^p + W^h \right\} \sin \alpha_m x \quad (5)$$

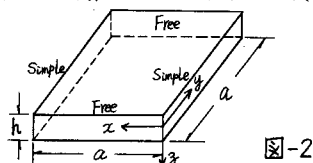
$$W^h = \begin{cases} A_m f_1 \cosh \eta y + B_m f_1 \sinh \eta y + C_m f_2 \cosh \eta y + D_m f_2 \sinh \eta y + E_m f_3 \cosh \eta y + F_m f_3 \sinh \eta y, \\ A_m f_1 \cosh \eta y + B_m f_1 \sinh \eta y + C_m f_1 \eta \cosh \eta y + D_m f_1 \eta \sinh \eta y + E_m f_3 \cosh \eta y + F_m f_3 \sinh \eta y, \\ A_m (f_1 \sinh \eta y \sin \eta y + f_2 \cosh \eta y \cos \eta y) + B_m (f_1 \cosh \eta y \sin \eta y + f_2 \sinh \eta y \cos \eta y) + C_m (f_1 \sinh \eta y \sin \eta y - f_2 \cosh \eta y \cos \eta y) \\ + D_m (f_1 \sinh \eta y \cos \eta y - f_2 \cosh \eta y \sin \eta y) + E_m f_3 \cosh \eta y + F_m f_3 \sinh \eta y \end{cases}$$

4境界条件 中等厚板理論の $y=0$ での自由および固定辺の境界条件は次のように示される。

自由辺:  $M_y = M_{xy} = Q_y = 0$ ,  $N_y = N_{xy} = 0$       ここで、 $\varphi_x, \varphi_y$  はせん断変形を

固定辺:  $W = \varphi_x = \varphi_y = 0$ ,  $u_0 = v_0 = 0$       考慮したたわみ角である。

5数値計算例 直交異方性の材料定数<sup>3)</sup> ( $C_{12}/C_{11} = 0.233$ ,  $C_{13}/C_{11} = 0.011$ ,  $C_{22}/C_{11} = 0.543$ ,  $C_{23}/C_{11} = 0.098$ ,  $C_{33}/C_{11} = 0.530$ ,  $C_{44}/C_{11} = 0.263$ ,  $C_{55}/C_{11} = 0.160$ ,  $C_{66}/C_{11} = 0.267$ ) をもつ相対2辺単純支持、残り2辺自由の正方形板に等分布荷重が作用する場合(図-2)の結果を表2に示す。級数の項数はいずれも50として計算している。



| $y/a$ | $W/D_{11}ga^4$ | $M_x/qa^2$ | $M_y/qa^2$ |
|-------|----------------|------------|------------|
| 0.5   | 0.00138        | 0.123      | 0.022      |
|       | 0.00137        | 0.122      | 0.023      |
| 1.0   | 0.00165        | 0.126      | 0.0        |
|       | 0.00163        | 0.125      | 0.0        |

表-2 たわみ、 $M_x, M_y$  の比較  
 $D = D_{11} = C_{11}h^3/12$ ,  $h/a = 0.1$ ,  
 下段の値は2重級数による結果。

6あとがき 単級数による計算時間は2重級数の約半分程度にとどまっており、十分活用できると思われる。

本研究にあたって、稲修也(現 浅川組)君の協力があったことをここに付記し、感謝致します。

1)Panc, V., Theories of Elastic Plates, Technomic, 1970. 2)Horikawa, T. and Sonoda, K., A theory of orthotropic moderately thick plates subjected to bending and stretching forces, Theo. and Appl. Mech., Vol. 30, 1981 3)Srinivas, R., et. al., Int. Jour. of Solid and Struc., Vol. 6, 1970.