I-70　グラフ理論を用いたトラス構造物の解析

東京電力　正会員　寺村芳明
長岡技術科学大学工学部　正会員　鳥居邦夫
鹿島建設　正会員　池田邦彦

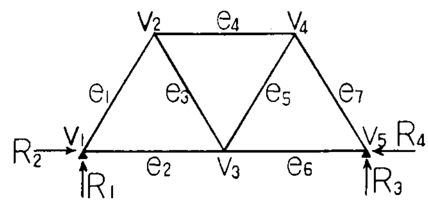
1．まえがき

骨組構造物の解析は，一般的に変位法を用いて行なわれる。しかし，この変位法は，演算時間・計算機容量などに問題がある。この問題克服のために種々の工夫がなされており，その中にグラフ理論を適用した例も見られる。小西・白石・玉村は，ネットワーク・トポロジーにより立体ラーメンを部分構造物に分割して解析し計算能率の向上を計っている[1)]。また，白石・谷口は，グラフ理論の概念を利用して係数行列の帯幅減少法を確立し[2)]さらに，帯幅減少のための節点番号付問題に対しても考察を加えている[3)]。

これに対して，応力法による解析については，構造力学的にCastiglianoの定理より明確に定式化されており，さらに，トラスに関して位相数学を利用して釣合方程式を機械的に作成する提案もされている[4)]。ここで問題となるのは，静定基本系構成部材と不静定部材との分類である。そこで，本報告では，グラフ理論を用いてこの部材の分類を自動的に行なう基準を示し，応力法による構造解析の自動化に寄与しようとするものである。

2．グラフ理論の適用

トラスが与えられた時，節点を点，部材を辺と考えれば，トラスを1つのグラフと考えることができる。そして，このグラフに関して接続行列[C]が求まる。この接続行列の各行の合計が各節点の次数{d}になる。節点の次数は各点に接続する辺の数を表わすので，トラスの解析においては，各節点に存在する未知部材力の数を表わすことになる。さらに，構造物では節点変位を拘束している方向に未知反力が存在し，これにより節点に存在する未知力の数はさらに増加する。そこで，この未知反力をも含めた未知力の数を表わす節点の修正次数をるベクトル{d'}を，前述の{d}と合わせて考える。



（a）トラスとそのグラフG(E,V)

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	d	R	d'
V_1	1	1	0	0	0	0	0	2	2	4
V_2	1	0	1	1	0	0	0	3	0	3
V_3	0	1	1	0	1	1	0	4	0	4
V_4	0	0	0	1	1	0	1	3	0	3
V_5	0	0	0	0	0	1	1	2	2	4

（b）　接続行列　〔C〕

図－1：トラスとその接続行列

今，平面トラスに限定すれば，考えられる平衡状態のパターンを{d}，{d'}などを用いて表わせば，次の通りである。

（Ⅰ）外的平衡状態

支点反力の数が3つの場合：$\sum_i R_i = 3$ ——（1）

（Ⅱ）内的平衡状態（節点の釣り合いのみ）

（a）未知部材力が2つの場合　：$d_i' = 2$ and $d_i = 2$ ——（2）

（b）未知支点反力が2つの場合　：$d_i' = 2$ and $d_i = 0$ ——（3）

（c）未知部材力が1つと未知支点反力が1つの場合：$d_i' = 2$ and $d_i = 1$ ——（4）

（d）未知部材力が1つの場合　：$d_i' = 1$ and $d_i = 1$ ——（5）

（e）未知支点反力が1つの場合　：$d_i' = 1$ and $d_i = 0$ ——（6）

以上の場合は，いずれも3つの平衡方程式（$\Sigma H = 0$，$\Sigma V = 0$，$\Sigma M = 0$）のいずれかを用いることにより，未知力を計算することができる。そして，この平衡方程式だけで全ての部材力と支点反力が計算できる構造系が静定基本系である。即ち，平衡方程式だけで解けなくなった時，この方程式が立てられるように部材を取り去ったり，節点拘束を解放したりすることをくり返し，最終的に全節点の{d'}が{0}になる時，今までの過程で取り

去った部材および節点拘束が，それぞれ不静定部材および不静定反力となる．

そこで，この事を利用して平面トラスにおける不静定部材と不静定反力を有効に選定する方法を考えた．

（Ⅰ）不静定部材：不静定部材の選定は，$d_i' \leqq 2$ なる節点 i がない状態で行なう．そして，この選定において次の基準を提案する．

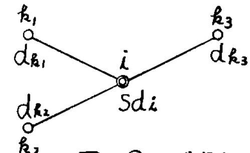
（a）不静定部材として部材を取り去った時，その部材の端点で前述の平衡方程式が成立しやすいように不静定部材は $\{d\}$ の値が最も少ない節点に接続している部材の中から選定する．

（b）不静定部材を取り去ることにより，その部材の両端点および構造系全体で不安定にならないこと．

ここで，基準（b）を満たすために次のベクトル $\{Sd\}$ を考える．

- ベクトルの要素はトラスの節点に対応している．
- 要素の値は，節点 i に隣接する全ての節点 k の次数 d_k の合計を表わしている．

$$Sd_i = \sum_k d_k \qquad (7)$$



$$Sd_i = \sum_k d_k = d_{k1} + d_{k2} + d_{k3}$$

図－2：ベクトル{Sd}

これらの基準より，$d_i \to min.$ and $Sd_i \to min$ なる節点 i に着目し，その節点 i に接続している部材の中で，$d_k \to max$ の部材を不静定部材とする．

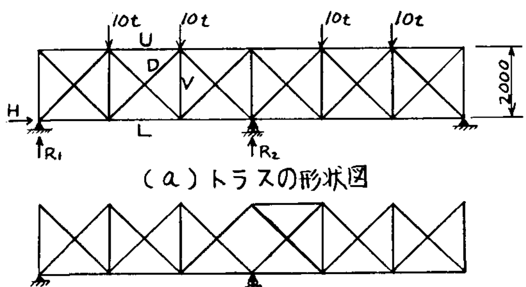
（Ⅱ）不静定反力：不静定部材を取り去った後，その構造物が外的に静定になるための必要な支持点の数NRは次式で計算することができる．

$$NR = 2 \times N - M + M' \qquad (8)$$

ここで，Nは節点数，Mは部材数，M′は不静定部材の数である．従って，節点移動を拘束している支点の中で任意にNR個選べばよい。ただし，この選出された支点で構造物が不安定になってはならない。

3．数値計算例

この基準に基づいて，平面トラスの解析を応力法により行なった。その結果を図－3，表－1に示す。



図－3：平面トラスの解析

全長 $\ell = 12$ m

$E = 2.1 \times 10^6$ kg/cm²

断面積：

弦　材；200 cm²
斜　材；150 cm²
鉛直材；100 cm²

表－1：計算結果

支　点	反　　力
H	6807
R₁	8891
R₂	22218
部　材	**部　材　力**
U	−6952
L	2915
D	−1175
V	−1282

（Kg）

4．あとがき

本報告は，グラフ理論を利用して静定部材と不静定部材との分類を自動的に行なうための一つの基準を提案した。その結果，本提案がほとんどのトラス構造物に適用でき，さらに，本提案は平衡状態のパターンをトポロジー的に解釈しているため，この基準を立体トラスに適用することは容易であることがわかった。また，ここでは中間ヒンジや構面の釣り合いは考慮されていないため，汎用性の面では，今後の工夫が望まれる。

5．参考文献

1）小西・白石・玉村：立体ラーメンの静的解析によるネットワークトポロジーの応用：第22回年講Ⅰ－43

2）白石・谷口・殿本：数値解析における帯行列法の有効性に関する研究：土木学会論文集 1981年10月

3）白石・谷口：マトリックス構造解析に対するグラフ理論による一考察：土木学会論文集 1980年2月

4）小松・佐々木：位相数学によるトラスの解法：第22回年講Ⅰ－73