

1. はじめに

任意の曲率・ねじれ率を持つ空間曲線ばりの力学的挙動を、何ら近似を行うことなしに、解析的に調べることは難しい。このため、実用計算においては、空間曲線ばりを直線ばりの集合に置き換えた折れ線近似モデルを用いて解析する手法がとられている。この手法によれば、直線ばり要素の数を増加させ、要素長を零に近づければ、空間曲線ばりの厳密解に一致する解が求まると考えられる。しかしながら、実際の数値計算では、要素数は有限であるので、たとえ極限として厳密解に収束するとしても、実用計算の結果には離散化誤差も含まれているはずである。

本報告では、平面曲線ばりを例にとり、折れ線近似モデルの混合法に基づく解が、折れ線の要素数を増加させたときに、曲線ばりの厳密解に収束するかどうかを陽な形の支配方程式で比較し、実用計算における折れ線近似解析の妥当性と精度を明確にした。

2. 折れ線近似モデルの曲線ばりの支配方程式への収束

ここでは、曲線ばりの面内問題について解法の手順を述べる。図1に示したような直線ばりの混合要素マトリックス $\bar{K}$ は次のようになる。

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{8EA} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{8EA} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{8EI} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{3}{8EI} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{8EA} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{8EA} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{8EI} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{3}{8EI} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

ここに、直線ばり要素の近似間数としては、要素内で線形に変化するものを使用し、 $\bar{l}$: 部材長、EA: 軸剛性、EI: 面内曲げ剛性である。

曲線ばりの基準座標系に、折れ線近似モデルの節点力と節点変位を適合させるため、図2に示すような座標変換を施す¹⁾。この曲線ばりの基準座標系における混合形のカー変位マトリックスは

$$\begin{Bmatrix} \hat{M}_i \\ \hat{M}_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{K} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{m}_i \\ \hat{m}_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{K}_{11} & \hat{K}_{12} \\ \hat{K}_{21} & \hat{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{m}_i \\ \hat{m}_{i+1} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

と表わされる。ここに、 $\hat{(\cdot)}$ は曲線ばりに関する値を示し、 $\hat{M}_i, \hat{m}_i$ はそれぞれ $\hat{M}_i = \{\bar{F}_i, 0, 0, -\bar{P}_i\}^T$, $\hat{m}_i = \{\bar{w}_i, \bar{N}_i, \bar{M}_i, \bar{v}_i\}^T$ (3.a, b)

とかける。また、 $\hat{K}$ は、曲線ばりの基準座標系へのすりつけを考え、座標変換マトリックス $T_{\pm}$ を用いて(図2参照)

$$\begin{bmatrix} \hat{K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_-^T & 0 \\ 0 & T_+ \end{bmatrix} \bar{K} \begin{bmatrix} T_- & 0 \\ 0 & T_+ \end{bmatrix}$$

と表わされる。ここに、 $T_{\pm}$ は要素の張る中心角を β とすれば、

$$T_{\pm} = \begin{bmatrix} \cos(\beta/2) & 0 & 0 & \pm \sin(\beta/2) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \mp \sin(\beta/2) & 0 & 0 & \cos(\beta/2) \end{bmatrix} \quad (5)$$

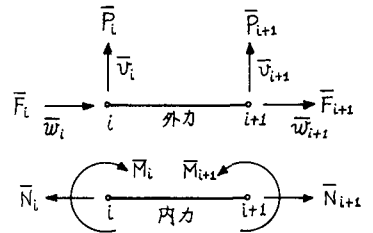


図1 直線ばり要素(面内問題)

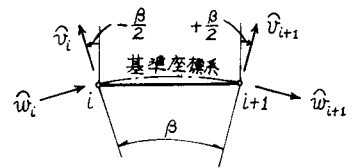


図2 基準座標系への座標変換

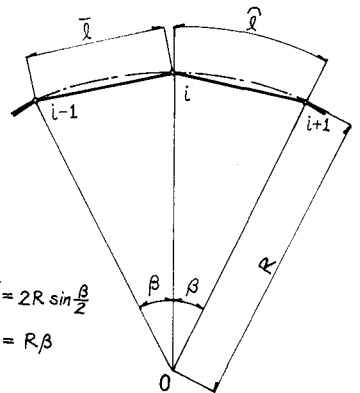


図3 折れ線近似モデル

と表わされる。

したがって、図3に示すような隣接する2要素に着目し、混合形のカー変位マトリックスを作成すると、

$$\begin{Bmatrix} \hat{M}_{i-1} \\ \hat{M}_i \\ \hat{M}_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{K}_{11} & \hat{K}_{12} & 0 \\ \hat{K}_{21} & \hat{K}_{11} + \hat{K}_{22} & \hat{K}_{12} \\ 0 & \hat{K}_{21} & \hat{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{m}_{i-1} \\ \hat{m}_i \\ \hat{m}_{i+1} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

が得られる。そこで、 i 節点には外力が作用していないと仮定すれば、 i 節点での混合形の支配方程式は

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{K}_{21} & \hat{K}_{11} + \hat{K}_{22} & \hat{K}_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{m}_{i-1} \\ \hat{m}_i \\ \hat{m}_{i+1} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

となる。

今、 i 節点での基準座標系に関する断面力と変位をそれぞれ $N, M; w, v$ とした後、隣接要素の断面力と変位を i 節点回りで曲線要素の部材長 $\hat{l}$ について Taylor 展開し、さらに、混合形マトリックスの要素 $\hat{K}_{21}, \hat{K}_{11} + \hat{K}_{22}, \hat{K}_{12}$ の要素を部材長 $\hat{l}$ についてべき級数に展開すると、式(7)より $\hat{l}$ のべき乗の順に整理された4個の支配方程式が求まる。さらに、極限として、分割数を無限大、すなわち、要素長 $\hat{l}$ を零に近づけると、4個の支配方程式が求まる。

以上のようにして得られた4個の支配方程式を、曲線ばりの厳密な支配方程式と比較すると、断面定数の差異を除き、両者は一致した。そこで、面外問題に対する検討の結果も含め、折れ線近似解析により得られるつり合い式と断面力-変位関係式を、離散化誤差²⁾とともに、表1に整理した。

表1 折れ線近似モデルによる支配方程式と離散化誤差

	直線ばり要素の近似関数	つり合い式		断面力-変位関係式	
		収束値 ($\hat{l} \rightarrow 0$)	主な離散化誤差	収束値 ($\hat{l} \rightarrow 0$)	主な離散化誤差
面内挙動	軸力の2要素内一定、他は要素内線形近似	$N' + \frac{M'}{R} = 0$ $\frac{N}{R} - M'' = 0$	$\frac{N'}{R^2} \hat{l}^2$ or $-\frac{M'}{R^2} \hat{l}^2$ $\frac{N}{R^3} \hat{l}^2$ or $\frac{M''}{R^2} \hat{l}^2$	$\frac{N}{EA} = w' + \frac{v}{R}$ $\frac{M}{EI} = -v'' + \frac{w'}{R}$	$\left(\frac{w'}{12R^2} + \frac{w'''}{12}\right) \hat{l}^2$ $\left(\frac{w'}{24R^3} + \frac{v''}{24R^2} + \frac{v'''}{12}\right) \hat{l}^2$
	断面力・変位ともに要素内線形近似	$N' + \frac{M'}{R} = 0$ $\frac{N}{R} - M'' = 0$	$\frac{N'}{R^2} \hat{l}^2$ or $-\frac{M'}{R^2} \hat{l}^2$ $\frac{N}{R^3} \hat{l}^2$ or $\frac{M''}{R^2} \hat{l}^2$	$\frac{N}{EA} = w' + \frac{v}{R}$ $\frac{M}{EI} = -v'' + \frac{w'}{R}$	$\left(\frac{w'}{12R^2} - \frac{v''}{12R}\right) \hat{l}^2$ $\left(\frac{w'}{24R^3} + \frac{v''}{24R^2} + \frac{v'''}{12}\right) \hat{l}^2$
面外挙動	断面力・変位ともに要素内線形近似	$M'_0 + \frac{T}{R} - \frac{B'}{R} = 0$ $\frac{M_0}{R} - T' + B'' = 0$	$\left(\frac{M'_0}{R^2} + \frac{T}{24R^3} - \frac{T''}{12R}\right) \hat{l}^2$ $\left(\frac{M_0}{R^3} + \frac{T'}{24R^2} - \frac{T'''}{12R}\right) \hat{l}^2$	$\frac{M_0}{EJ} = -u'' - \frac{\theta}{R}$ $\frac{T}{GJ_d} = -\theta' + \frac{u'}{R}$ $\frac{B}{EJ_w} = -\theta'' + \frac{u''}{R}$	$\left(\frac{u''}{12R^2} - \frac{\theta''}{12R}\right) \hat{l}^2$ $\left(\frac{\theta'}{12R^2} + \frac{u'''}{12R}\right) \hat{l}^2$ $\left(\frac{\theta''}{24R^2} + \frac{u'''}{24R^3} + \frac{\theta'''}{12}\right) \hat{l}^2$

(注) (')は曲線座標系の軸線方向座標に関する微分を示し、 u :面外方向変位、 θ :ねじり角、 M_0 :面外曲げモーメント、 T :ねじりモーメント、 B :そりモーメント、 EJ :面外曲げ剛性、 GJ_d :ねじり剛性、 EJ_w :そり剛性である。

3. まとめ

表1より、混合法による折れ線近似解析は、許容される最低次の近似関数を使用したとしても、要素長を無限小にした時、断面力・変位ともに曲線ばりの厳密解に収束することを考え合わせれば、有効かつ妥当であることが分る。また、要素長が有限であるときの離散化誤差を調べた結果、曲線ばりの境界条件にもよるが、各々の折れ線要素の張る中心角が5°以下であれば、得られる近似解は厳密解にほぼ等しくなることが分った。

参考文献

- 1) 鈴木・上野・西野: 折れ線近似による曲線橋の解析, 第26回構造工学シンポジウム講演論文集, 1980.2, pp.121~131.
- 2) 川面・秋月: 離散化誤差の一検討, マトリックス解析法研究発表論文集, 1979.6, pp.1~6.