

パシフィックコンサルタンツ(株) 山下四郎
同上 正 田中寿美

。はじめに

有限要素法は、工学および物理学的諸問題を解くための有力な数値解析法であり、その応用は広範囲に及ぶ。特に土木工学においては、構造解析の他、地盤を解析する手段としてこれに代わるものがないため非常によく使われている。

これらの解析にあたっては、大型コンピュータを使用しているのが現状である。しかし現在、超小型コンピュータ(パーソナルコンピュータ)の著ましい日進月歩の発展により、容量、演算スピード共にその性能は非常に高くなっている。これを反映して、最近、パーソナルコンピュータによる有限要素法を扱った書籍も出版されているが、実用に供するに至っていない。今回、パーソナルコンピュータを使用して、二次元弾性問題である程度実用に耐えるプログラムを開発したので報告する。また、パーソナルコンピュータの特徴である対話形式、グラフィック機能を活用して使い易さも追求した。

。FEM数値解析

弾性体に対する仮想仕事の原理は、 x, y, z 方向の仮想変位を $\delta u, \delta v, \delta w$ とすると

$$\iint (P_x \delta u + P_y \delta v + P_z \delta w) ds + \iiint (F_x \delta u + F_y \delta v + F_z \delta w) dv - \iiint (\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \sigma_z \delta \epsilon_z + \tau_{xy} \delta \epsilon_{xy} + \tau_{yz} \delta \epsilon_{yz} + \tau_{zx} \delta \epsilon_{zx}) dv = 0$$
と表わすことができる。ここに P_x, P_y, P_z は単位面積当りの表面力、 F_x, F_y, F_z は単位体積当りの体積力、 $\delta \epsilon_x, \delta \epsilon_y, \delta \epsilon_z, \delta \epsilon_{xy}, \delta \epsilon_{yz}, \delta \epsilon_{zx}$ は仮想変位の各成分 $\delta u, \delta v, \delta w$ に対応するひずみ成分である。

上式をベクトル表現で表わすと

$$\iint \{\delta^*\}^T \{P\} ds + \iiint \{\delta^*\}^T \{F\} dv - \iiint \{E^*\}^T \{\sigma\} dv = 0$$

となる。

一般に $\{\sigma\} = [D] \{\epsilon\} - [D] \{\epsilon_0\} + \{\sigma_0\}$ であり

また、 $\{\delta_{in}\} = [N] \{\delta_{out}\}$, $\{\epsilon\} = [B] \{\delta_{out}\}$ であるから

$$\iint \{\delta^*\}^T \{P\} ds = \iint \{\delta_{out}^*\}^T [N]^T \{P\} ds = \{\delta_{out}^*\}^T \iint [N]^T \{P\} ds$$

$$\iiint \{\delta^*\}^T \{F\} dv = \{\delta_{out}^*\}^T \iiint [N]^T \{F\} dv$$

$$\iiint \{E^*\}^T \{\sigma\} dv = \iiint \{E^*\}^T ([D] \{\epsilon\} - [D] \{\epsilon_0\} + \{\sigma_0\}) dv$$

$$= \iiint \{E^*\}^T [D] \{\epsilon\} dv - \iiint \{E^*\}^T [D] \{\epsilon_0\} dv + \iiint \{E^*\}^T \{\sigma_0\} dv$$

$$= \{\delta_{out}^*\}^T \iiint [B]^T [D] [B] \{\delta_{out}\} dv - \{\delta_{out}^*\}^T \iiint [B]^T [D] \{\epsilon_0\} dv + \{\delta_{out}^*\}^T \iiint [B]^T \{\sigma_0\} dv$$

以上より

$$\iiint [B]^T [D] [B] dv \cdot \{\delta_{out}\} - \iiint [B]^T [D] \{\epsilon_0\} dv + \iiint [B]^T \{\sigma_0\} dv = \iint [N]^T \{P\} ds + \iiint [N]^T \{F\} ds$$

$$\therefore \iiint [B]^T [D] [B] dv \cdot \{\delta_{out}\} = \iiint [B]^T [D] \{\epsilon_0\} dv - \iiint [B]^T \{\sigma_0\} dv + \iint [N]^T \{F\} dv + \iint [N]^T \{P\} ds$$

二次元の解析では上式は

$$\iint [B]^T [D] [B] ds \cdot \{\delta_{out}\} = \iint [B]^T [D] \{\epsilon_0\} ds - \iint [B]^T \{\sigma_0\} ds + \int_p [N]^T \{F\} dp + \int_p [N]^T \{P\} dp$$

となり一般に $[K] \{\delta_{out}\} = \{f\}$ となる。

。プログラム化の手法

有限要素法による静的な構造解析は、最終的には連立一次方程式を解くことに帰着する。連立一次方程式を解く方法としては、主記憶容量が小さいこと、実際の業務に供することを考慮してユニット型式を採用した。

構造を幾つかのユニットに分割し、各ユニットについてそれぞれに含まれる節点を表の規則に従ってクラス分けをする。

ユニット1の剛性方程式は、

$$\begin{bmatrix} K_1^{AA} & K_1^{AB} & K_1^{AF} \\ K_1^{BA} & K_1^{BB} & K_1^{BF} \\ K_1^{FA} & K_1^{FB} & K_1^{FF} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1^A \\ \delta_1^B \\ \delta_1^F \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^A \\ F_1^B \\ F_1^F \end{Bmatrix} \quad \cdots (1)$$

ここで、下添字はユニット番号、上添字Aはクラス1およびクラス2の節点、Bはクラス3の節点、Fはクラス4の節点を表す。第1行より

$$\{K_1^{AA}\}\{\delta_1^A\} + \{K_1^{AB}\}\{\delta_1^B\} + \{K_1^{AF}\}\{\delta_1^F\} = \{F_1^A\} \quad \therefore \{\delta_1^A\} = [K_1^{AA}]^{-1}(\{F_1^A\} - [K_1^{AB}]\{\delta_1^B\} - [K_1^{AF}]\{\delta_1^F\})$$

第2行に代入し、整理すると、

$$([K_1^{BB}] - [K_1^{BA}][K_1^{AA}]^{-1}[K_1^{AB}])\{\delta_1^B\} = \{F_1^B\} - [K_1^{BF}]\{\delta_1^F\} - [K_1^{BA}][K_1^{AA}]^{-1}(\{F_1^A\} - [K_1^{AF}]\{\delta_1^F\})$$

$\{\delta_1^B\}$ はユニット2から見ればクラス2のみの節点から成立っているからユニット2に加え合わせて整理すると、(1)式の下添字が2になるだけである。この過程を最終ユニットまで行くと最後のユニットNは、

$$\begin{bmatrix} K_N^{AA} & K_N^{AF} \\ K_N^{FA} & K_N^{FF} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_N^A \\ \delta_N^F \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_N^A \\ F_N^F \end{Bmatrix} \quad \text{となり、} \quad \{\delta_N^A\} = [K_N^{AA}]^{-1}(\{F_N^A\} - [K_N^{AF}]\{\delta_N^F\}) \quad \text{となる。}$$

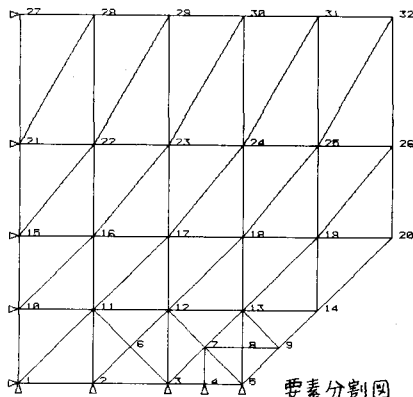
上式によってNユニットの節点変位 $\{\delta_N^A\}$ が求められた。この $\{\delta_N^A\}$ の中にはユニット(N-1)のクラス3の節点変位 $\{\delta_{N-1}^B\}$ が含まれており、これを用いて次式よりユニット(N-1)のクラス1、クラス2の節点変位が求まる。

$$\{\delta_{N-1}^A\} = [K_{N-1}^{AA}]^{-1}(\{F_{N-1}^A\} - [K_{N-1}^{AB}]\{\delta_{N-1}^B\} - [K_{N-1}^{AF}]\{\delta_{N-1}^F\})$$

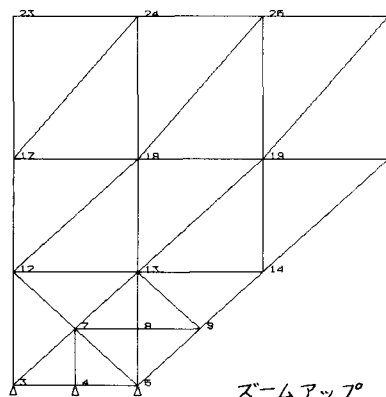
この計算を繰り返してユニット1まで行くと、すべての未知節点変位が求まる。

支点反力は $\{F^F\} = [K^{FA}]\{\delta^A\} + [K^{FB}]\{\delta^B\} + [K^{FF}]\{\delta^F\}$ より求まる。

・ 計算例



要素分割図



ズームアップ

JOINT	DISPLACEMENT-X	DISPLACEMENT-Y
1	0.0000000E-001	0.0000000E-001
2	1.3757632E-005	0.0000000E-001
3	4.0235743E-001	0.0000000E-001
4	4.4947235E-001	0.0000000E-001
5	0.14500031E-005	0.0000000E-001
6	1.6713561E-005	4.8481907E-005
7	2.8101740E-005	7.8217264E-005
8	1.83464091E-005	1.2353408E-004
9	1.0851370E-005	2.7862068E-004
10	0.0000000E-001	8.6922243E-005
11	4.3027133E-006	9.2661945E-005
12	-3.5410656E-006	1.1779103E-004
13	-3.1213554E-005	2.0865622E-004
14	-2.5367209E-005	4.2295749E-004
15	0.0000000E-001	1.8754599E-004
16	-2.7957046E-005	1.9909224E-004
17	-5.1357442E-005	2.4051306E-004
18	-8.6985979E-005	3.3102099E-004
19	-1.1288731E-004	4.7594669E-004
20	-1.1786281E-004	6.0704339E-004
21	0.0000000E-001	3.2210764E-004
22	-4.7756123E-005	3.3623876E-004
23	-9.5203952E-005	3.8270347E-004
24	-1.4124724E-004	4.6510432E-004
25	-1.8046764E-004	5.1380722E-004
26	-2.0791143E-004	5.6027120E-004
27	0.0000000E-001	5.2356328E-004
28	-8.1880635E-005	5.2948744E-004
29	-1.5054705E-004	5.7157519E-004
30	-2.2607561E-004	6.4390475E-004
31	-2.7687189E-004	7.3147601E-004
32	-3.1038378E-004	8.0576498E-004

計算結果 (変位)

・ おわりに

今回のテストランでは、SEIKO 9500 (ユーザエリア320KB、外部メモリ1.2MB)のパーソナルコンピュータを使用し、節点数150、要素数200程度と、このクラスのコンピュータでも実務に耐えることが分った。また、さらに外部記憶装置の追加により、節点数、要素数の制限は簡単に上げることが可能である。

今後、CPU32ビットを搭載したもの、外部メモリに光ディスクを使用したもの等、パーソナルコンピュータの発展により、増々その適用範囲は増大することが予想される。