一般化座標法の還元法による定式化

鳥取大学工学部　正員　○神部俊一
中谷義紀

1. まえがき

一般化座標法を還元法によって定式化すれば，中間隔壁を有する変断面の多室断面箱桁を種々の境界条件並びに載荷条件のもとで解析することが可能である。周知のように，還元法には格間行列に含まれる双曲線関数項の値が行列の乗算の繰り返しによって著しく大きくなることから生ずる数値計算上の困難が伴う。そこで，この困難を回避するために本稿では，格間行列において多項式から成る項と双曲線関数から成る項とを分離するように工夫を払い，双曲線関数項を単位化するという中井[1)]等の手法を応用して一般化座標法を還元法によって再定式化する手法を示す。

2. 基礎式

以下において，箱桁の横断面の面外変位の自由度を m，面外変位の自由度を n とする。

A, B, C, R ：　(m, m), (m, m), (m, n), (n, n) 型の一般化剛性マトリックス，

U, V ：　面外並びに面内方向の一般化変位を成分とする m 次と n 次の列ベクトル，

M, Q ：　面外並びに面内方向の一般化断面力を成分とする m 次と n 次の列ベクトル，

Q^* ：　一般化等分布荷重を成分とする n 次の列ベクトル，

d_c, ℓ_c ：　横断面を構成する薄板要素の基準幅，基準支間長

なる記号を用いて，無次元化された基礎式を求めると次のようになる。[2)]

構成方程式 ：　$\bar{M}(\bar{z}) = \bar{A}\bar{U}'(\bar{z})$,　　$\bar{Q}(\bar{z}) = \gamma^{-1}(\bar{C}^T\bar{U}(\bar{z}) + \bar{R}\bar{V}'(\bar{z}))$　　------(1)1~2

平衡方程式 ：　$\bar{M}''(\bar{z}) - \gamma^{-1}\alpha^{-2}\bar{H}\bar{A}^{-1}\bar{M}(\bar{z}) + \alpha^{-2}\bar{C}\bar{R}^{-1}\bar{Q}^* = 0$,　　$\bar{Q}'(\bar{z}) + \bar{Q}^* = 0$　　------(2)1~2

ここに，　$\gamma = E/G$,　$\alpha = d_c/\ell_c$ ----(3)1~2　　$\bar{H} = \bar{B} - \bar{C}\bar{R}^{-1}\bar{C}^T$ ------(4)

次に，非負実対称行列に関する一般固有値問題

$$\bar{H}\bar{x} = \bar{\lambda}^2\bar{A}\bar{x} \qquad \text{------(5)}$$

の $\bar{A}$ に関して正規化された (m, m) 型のモーダルマトリックスを $\bar{X}$ とすれば

$$\bar{X}^T\bar{A}\bar{X} = \bar{E}_m, \quad \bar{X}^T\bar{H}\bar{X} = \bar{\Lambda}_m^2 \qquad \text{------(6)1\sim2}$$

という関係が成立する。

ここに，　$\bar{\Lambda}_m^2 = \mathrm{diag}(\bar{\lambda}_i^2)(i = 1, \cdots, m)$ ----(7)

で定義される m 次の対角行列であり，$\bar{E}_m$ は m 次の単位行列である。

ここで，　$\bar{Y} = \bar{A}\bar{X}$ ------(8)

とおくと，式(6)1より

$$\bar{X}^T = \bar{Y}^{-1}, \quad \bar{Y}^T = \bar{X}^{-1} \qquad \text{------(9)}$$

という関係が成立する。

さらに，表示式を簡単にするために，

$$\hat{X} = \alpha^{-2}\bar{R}^{-1}\bar{C}^T\bar{X}, \qquad \text{------(10)}$$

$$\bar{\Omega}_m^2 = \gamma^{-1}\alpha^{-2}\bar{\Lambda}_m^2 = \mathrm{diag}(\bar{\omega}_j^2) \qquad \text{------(11)}$$

$$\hat{Q}^* = \hat{X}^T\bar{Q}^* \qquad \text{------(12)}$$

なる記号を導入する。

式(6)1~2で示されるモーダルマトリックス $\bar{X}$ の性質を応用すれば，式(2)1は対角化できて $\bar{M}(\bar{z})$ に対する一般解が容易に求まる。この解と残りの平衡方程式と構成方程式とから任意点 $\bar{z}$ の状態量ベクトル $\bar{M}(\bar{z})$, $\bar{Q}(\bar{z})$, $\bar{U}(\bar{z})$, $\bar{V}(\bar{z})$ を初期状態量ベクトル $\bar{U}_0$, $\bar{V}_0$, $\bar{M}_0$, $\bar{Q}_0$ を用いて表わすと以下のようになる。

$$\bar{M}(\bar{z}) = \bar{Y}\bar{K}_M(\bar{z})\bar{X}^T\bar{M}_0 + \bar{Y}\bar{K}_Q(\bar{z})\bar{X}^T\bar{Q}_0 + \bar{Y}\bar{K}_U(\bar{z})\bar{Y}^T\bar{U}_0 + \bar{Y}\bar{K}_L(\bar{z})\bar{X}^T\bar{Q}^* \qquad \text{------(13)}$$

$$\bar{Q}(\bar{z}) = \bar{Q}_0 - \bar{Q}^*\bar{z} \qquad \text{------(14)}$$

$$\bar{U}(\bar{z}) = \bar{X}\bar{N}_M(\bar{z})\bar{X}^T\bar{M}_0 + \bar{X}\bar{N}_Q(\bar{z})\hat{X}^T\bar{Q}_0 + \bar{X}\bar{N}_U(\bar{z})\bar{Y}^T\bar{U}_0 + \bar{X}\bar{N}_L(\bar{z})\hat{X}^T\bar{Q}^* \qquad \text{------(15)}$$

$$\begin{aligned}\bar{V}(\bar{z}) = {} & \alpha^2\hat{X}\bar{L}_M(\bar{z})\bar{X}^T\bar{M}_0 + (\alpha^2\hat{X}\bar{L}_Q(\bar{z})\hat{X}^T + \gamma\bar{z}\bar{R}^{-1})\bar{Q}_0 \\ & + \alpha^2\hat{X}\bar{L}_U(\bar{z})\bar{Y}^T\bar{U}_0 + \bar{V}_0 + (\alpha^2\hat{X}\bar{L}_L(\bar{z})\hat{X}^T - \tfrac{1}{2}\gamma\bar{z}^2\bar{R}^{-1})\bar{Q}^*\end{aligned} \qquad \text{------(16)}$$

ここに，$\bar{K}_M(\bar{z}), \bar{K}_Q(\bar{z}), \cdots, \bar{L}_L(\bar{z})$は分割対角行列である。　他の分割対角行列の表示式は全く同様であるので，$\bar{K}_M(\bar{z})$を例として表示式を書くと以下のようになる。

$$\bar{K}_M(\bar{z}) = \begin{array}{c} \\ p\{ \\ q\{ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} p & q \end{array} \\ \left[\begin{array}{c:c} \hat{K}_M^p(\bar{z}) & \bar{O}_{pq} \\ \hdashline \bar{O}_{qp} & \hat{K}_M^q(\bar{z}) \end{array}\right] \end{array}$$

ここに，$\hat{K}_M^p(\bar{z})$：多項式を成分とするp次の対角行列，$\bar{O}_{pq}$：(p,q)型の零行列，
$\hat{K}_M^q(\bar{z})$：双曲線関数を成分とするq次の対角行列，$\bar{O}_{qp}$：(q,p)型の零行列
ただし，pは固有値が零の重複度で　$q = m - p$　である。

3．双曲線関数項の分離

所要の目的を果すために，行列$\bar{X}, \bar{Y}, \hat{X}$を次のように分割する。

$$\bar{X} = m\{\left[\overset{p}{\bar{X}_p} \,\vdots\, \overset{q}{\bar{X}_q}\right], \quad \bar{Y} = m\{\left[\overset{p}{\bar{Y}_p} \,\vdots\, \overset{q}{\bar{Y}_q}\right], \quad \hat{X} = n\{\left[\overset{p}{\hat{X}_p} \,\vdots\, \overset{q}{\hat{X}_q}\right] \qquad \text{-----}\ (17)_{1\sim3}$$

これらの分割分列を用いて次式で定義される新しいp次とq次の状態量列ベクトル

$$\hat{M} \equiv \bar{X}^T\bar{M} = [\bar{X}_p^T M \,\vdots\, \bar{X}_q^T M]^T \equiv [\hat{M}_p \,\vdots\, \hat{M}_q]^T, \quad \hat{Q} \equiv \hat{X}^T\bar{Q} = [\hat{X}_p^T\bar{Q} \,\vdots\, \hat{X}_q^T\bar{Q}]^T \equiv [\hat{Q}_p \,\vdots\, \hat{Q}_q]^T$$

$$\hat{U} \equiv \bar{Y}^T\bar{U} = [\bar{Y}_p^T\bar{U} \,\vdots\, \bar{Y}_q^T\bar{U}]^T \equiv [\hat{U}_p \,\vdots\, \hat{U}_q]^T, \quad \hat{Q}^* \equiv \hat{X}^T\bar{Q}^* = [\hat{X}_p^T\bar{Q}^* \,\vdots\, \hat{X}_q^T\bar{Q}^*] \equiv [\hat{Q}_p^* \,\vdots\, \hat{Q}_q^*]^T \qquad \text{-----}\ (18)_{1\sim4}$$

を用いると，式(9)により式(13)，(15)，(16)は次のように書き改められる。

$$\hat{M}_p(\bar{z}) = \hat{K}_M^p(\bar{z})\hat{M}_{p,0} + \hat{K}_Q^p(\bar{z})\hat{Q}_{p,0} + \hat{K}_U^p(\bar{z})\hat{U}_{p,0} + \hat{K}_L^p(\bar{z})\hat{Q}_p^* \qquad \text{-----}\ (19)$$

$$\hat{M}_q(\bar{z}) = \hat{K}_M^q(\bar{z})\hat{M}_{q,0} + \hat{K}_Q^q(\bar{z})\hat{Q}_{q,0} + \hat{K}_U^q(\bar{z})\hat{U}_{q,0} + \hat{K}_L^q(\bar{z})\hat{Q}_q^* \qquad \text{-----}\ (20)$$

$$\hat{U}_p(\bar{z}) = \hat{N}_M^p(\bar{z})\hat{M}_{p,0} + \hat{N}_Q^p(\bar{z})\hat{Q}_{p,0} + \hat{N}_U^p(\bar{z})\hat{U}_{p,0} + \hat{N}_L^p(\bar{z})\hat{Q}_p^* \qquad \text{-----}\ (21)$$

$$\hat{U}_q(\bar{z}) = \hat{N}_M^q(\bar{z})\hat{M}_{q,0} + \hat{N}_Q^q(\bar{z})\hat{Q}_{q,0} + \hat{N}_U^q(\bar{z})\hat{U}_{q,0} + \hat{N}_L^q(\bar{z})\hat{Q}_q^* \qquad \text{-----}\ (22)$$

$$\begin{aligned}\hat{V}(\bar{z}) &\equiv \bar{V}(\bar{z}) + \alpha^2\hat{X}_q\bar{\Omega}_q^{-2}\hat{M}_q(\bar{z}) \\ &= \alpha^2\hat{X}_p\hat{L}_M^p(\bar{z})\hat{M}_{p,0} + \alpha^2\hat{X}_p\hat{L}_Q^p(\bar{z})\hat{Q}_{p,0} + \alpha^2\hat{X}_p\hat{L}_U^p(\bar{z})\hat{U}_{p,0} + \alpha^2\hat{X}_p\hat{L}_L^p(\bar{z})\hat{Q}_p^* \\ &\quad + \gamma\bar{z}\bar{R}^{-1}\bar{Q}_0 - \frac{1}{2}\gamma\bar{z}^2\bar{R}^{-1}\bar{Q}^* + \hat{V}_0 + \alpha^2\bar{z}\hat{X}_q\bar{\Omega}_q^{-2}\hat{Q}_{q,0} - \frac{1}{2}\alpha^2\bar{z}^2\hat{X}_q\bar{\Omega}_q^{-2}\hat{Q}_q^* \end{aligned} \qquad \text{-----}\ (23)$$

この様に，状態量列ベクトルを変形すると双曲線関数項を含む状態量列ベクトルは$\hat{M}_q, \hat{U}_q$だけである。そこで$Ch_q^{-1}(\bar{z}) \equiv \mathrm{diag}(\cosh^{-1}\bar{\omega}_j\bar{z})$ ただし$\bar{\omega}_j \neq 0$ $(j=1,\cdots,q)$なる対角行列を導入すれば双曲線関数項を単位化できるが，その詳細については紙面の都合で省略する。

4．境界条件

始端の支持条件に対する理想化された境界条件は次のようである。　自由端：$\bar{M}_0 = 0$，$\bar{Q}_0 = 0$，固定端：$\bar{U}_0 = 0$，$\bar{V}_0 = 0$，回転端：$\bar{M}_0 = 0$，$\bar{V}_0 = 0$
これらの境界条件と式$(18)_{1\sim3}$，(23)とを考慮に入れて，新しい状態量列ベクトルに対して初期状態列ベクトルを分類すると表－1のようになる。　始端が固定端と回転端の場合，$\bar{Q}_0$の他に$\hat{Q}_{p,0}, \hat{Q}_{q,0}$が未知の状態量列ベクトルになるが，次式

$$\hat{Q}_{p,0} - \hat{X}_p\bar{Q}_0 = 0, \quad \hat{Q}_{q,0} - \hat{X}_q\bar{Q}_0 = 0 \qquad \text{----}\ (24)_{1\sim2}$$

を拘束条件にすれば，条件式の数に過不足はなくなり$\bar{Q}_0$，$\hat{Q}_{p,0}$，$\hat{Q}_{q,0}$を独立な未知量として取り扱える。

表－1

支持条件	状態量列ベクトルに対する制約条件	未知の状態量列ベクトル
自由端	$\hat{M}_{p,0}=0$, $\hat{M}_{q,0}=0$ $\hat{Q}_{p,0}=0$, $\hat{Q}_{q,0}=0$ $\bar{Q}_0=0$	$\hat{U}_{p,0}$, $\hat{U}_{q,0}$, $\hat{V}_0$
固定端	$\hat{U}_{p,0}=0$, $\hat{U}_{q,0}=0$ $\hat{V}_0=\alpha^2\hat{X}\bar{\Omega}_q^{-2}\hat{M}_q$	$\hat{M}_{p,0}$, $\hat{M}_{q,0}$, $\hat{Q}_{p,0}$, $\hat{Q}_{q,0}$, $\bar{Q}_0$
回転端	$\hat{M}_{p,0}=0$, $\hat{M}_{q,0}=0$ $\hat{V}=0$	$\hat{U}_{p,0}$, $\hat{U}_{q,0}$, $\hat{Q}_{p,0}$, $\hat{Q}_{q,0}$, $\bar{Q}_0$

中間隔壁の処理方法（格点行列の作成方法）については紙面の都合で省略する。

参考文献

1) 中井博 他：伝達マトリックス法による曲げねじりを受ける薄肉直線桁橋の解析と断面力，変形量に関する研究
J.S.C.E.，No.233，1975－1

2) 神部俊一 他：多室断面を有する連続箱桁の一般化座標法によるマトリックス構造解析，第27回構造工学シンポジウム，1981－2．