

室蘭工業大学

正員

松岡健一

同

同

岸徳光

北海道大学

同

能町純雄

1. はじめに 弾性体中に円孔や、異質円柱や円筒が存在するとき、軸と角度をもつ弾性体中を伝播するP波やS波による、円筒周囲の動的応答問題は三次元弾性問題である。この種の問題に対する研究は若干行われており、著者も円筒を有する無限体に斜め入射するSH波による応答解析を行なっているが^{1),2)}、本論文は、斜め入射P波に対して同様の解析を行なったものである。

2. 波動方程式の変位解 図-1に示すように、無限弾性体中に厚肉円筒があり、円筒軸方向と角φをなす方向からP波が入射する定常状態を考えるものとする。入射波の振幅を w_0 、角速度を ω 、進行速度を c_p 、とすれば、入射P波は円柱座標で表わして

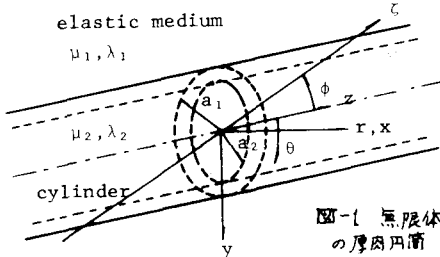


図-1 無限体中の厚肉円筒

$$u^{(0)} = -w_0 \exp[i\omega\{t - (z \cos\phi + r \cos\theta \sin\phi)/c_p\}] \sin\phi \cos\theta \quad (1)$$

$$v^{(0)} = w_0 \exp[i\omega\{t - (z \cos\phi + r \cos\theta \sin\phi)/c_p\}] \sin\phi \sin\theta \quad (2)$$

$$w^{(0)} = w_0 \exp[i\omega\{t - (z \cos\phi + r \cos\theta \sin\phi)/c_p\}] \cos\phi \quad (3)$$

となる。このときの円筒の波動方程式の変位解は、基礎方程式を有限フーリエ・ハンケル変換を用いて解けば、定常状態を仮定しているため、円筒に対して

$$u = \sum_m C_m (\tilde{A}_{mr} + \tilde{B}_{mr}) \cos m\theta \cdot e^{i(\omega t - N_p z)} \quad (4)$$

$$v = \sum_m C_m (\tilde{A}_{mr} - \tilde{B}_{mr}) \sin m\theta \cdot e^{i(\omega t - N_p z)} \quad (5)$$

$$w = \sum_m C_m \tilde{w}_{mr} \cos m\theta \cdot e^{i(\omega t - N_p z)} \quad (6)$$

ここで $C_m = 1/2\pi$, $C_m = 1/\pi$ ($m=0$)、 t は時間であり $N_p = \omega \cos\phi / c_p$ である。さらに μ, λ を Lamé の定数 ρ を円筒の密度とし

$$N_{p\mu}^2 = N_p^2 - \rho \omega^2 / \mu, \quad N_{p\lambda}^2 = N_p^2 - \rho \omega^2 / (2\mu + \lambda)$$

とすれば、 $\tilde{A}_{mr}, \tilde{B}_{mr}, \tilde{w}_{mr}$ は

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{mr} = & \sum_{k=1}^{\infty} \left[\chi_{mp}^{(k)}(N_{p\mu}r) / N_{p\mu} \left\{ \alpha_{mk} / 2\mu + (m+1)A_{mk} + (m-1)B_{mk} \right. \right. \\ & \left. \left. - iN_p E_{mk} / 2 \right\} + (\mu N_p / \rho \omega^2) \left\{ \chi_{mp}^{(k)}(N_{p\mu}r) / N_{p\mu} - N_{p\lambda} \right. \right. \\ & \left. \left. \chi_{mp}^{(k)}(N_{p\lambda}r) / N_p \right\} \left\{ \beta_{mk} / 2\mu + (m+1)A_{mk} - (m-1)B_{mk} \right. \right. \\ & \left. \left. + iN_p E_{mk} \right\} \right] \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{mr} = & \sum_{k=1}^{\infty} \left[\chi_{ms}^{(k)}(N_{p\mu}r) / N_{p\mu} \left\{ \alpha_{mk} / 2\mu + (m+1)A_{mk} + (m-1)B_{mk} \right. \right. \\ & \left. \left. + iN_p E_{mk} / 2 \right\} + (\mu N_p / \rho \omega^2) \left\{ \chi_{ms}^{(k)}(N_{p\mu}r) / N_{p\mu} \right. \right. \\ & \left. \left. - N_{p\lambda} \chi_{ms}^{(k)}(N_{p\lambda}r) / N_p \right\} \left\{ \beta_{mk} / 2\mu + (m+1)A_{mk} - (m-1)B_{mk} \right. \right. \\ & \left. \left. + iN_p E_{mk} \right\} \right] \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{mr} = & \sum_{k=1}^{\infty} \left[G_m^{(k)}(N_{p\mu}r) E_{mk} - i(2\mu N_p / \rho \omega^2) \left\{ G_m^{(k)}(N_{p\mu}r) \right. \right. \\ & \left. \left. - G_m^{(k)}(N_{p\lambda}r) \right\} \left\{ \beta_{mk} / 2\mu + (m+1)A_{mk} - (m-1)B_{mk} \right. \right. \\ & \left. \left. + iN_p E_{mk} \right\} \right] \quad (9) \end{aligned}$$

と表わされる。上式中の関数は、

$$\begin{aligned} G_m^{(k)}(Nr) &= R_{m,m}^{(k)}(Nr) / R_{m,m}^{(k)}(Na_k), \quad \chi_{mp}^{(k)}(Nr) = R_{m,m}^{(k)}(Nr) / R_{m,m}^{(k)}(Na_k), \\ \chi_{ms}^{(k)}(Nr) &= R_{m,m}^{(k)}(Nr) / R_{m,m}^{(k)}(Na_k), \quad a_0 = a_z, \quad a: \text{半径} \\ R_{j,m}^{(k)}(Nr) &= J_j(Nr) K_m(Na_{k-1}) - (-1)^{j+m} I_m(Na_{k-1}) K_j(Nr) \end{aligned}$$

I, K は変形オイ種及びオイ種のベッセル関数で、 α, β, A, B, E は未知定数である。

円孔を有する無限体は、式(7)~(9)で $k=2$ のみとし、 $a_1 \rightarrow \infty$ とし $R_{j,m} = (-1)^{j+m} K_j(Nr)$ とする。

3. 境界条件 まず(7)~(9)式の係数 A, B について

は次の適合条件を満足しなければならない

$$a_k A_{mk} = \tilde{A}_{mr} \big|_{r=a_k}, \quad (10) \quad a_k B_{mk} = \tilde{B}_{mr} \big|_{r=a_k}, \quad (11)$$

ここで無限体の変位および応力を上添字(1)、円筒のもう上添字(2)で表わし、その他の係数をそれぞれ下添字 1, 2 を付して表わすものとすれば、境界条件は円筒の内面は中空であるとして

i) $r=a_2$ において

$$(\tau_{r\theta}^{(2)})_{r=a_2} = 0, \quad \alpha_{m2}^{(2)} = 0, \quad (12) \quad (v_r^{(2)})_{r=a_2} = 0, \quad \beta_{m2}^{(2)} = 0, \quad (13)$$

$$(\tau_{rz}^{(2)})_{r=a_2} = 0 \quad (14)$$

また、無限体と円筒の境界面では変位および応力が連続であるとして、

ii) $r=a_1$ において

$$(u^{(2)} - u^{(1)})_{r=a_1} = (v^{(2)} - v^{(1)})_{r=a_1} = (w^{(2)} - w^{(1)})_{r=a_1} = 0, \quad (15)$$

$$(w^{(2)} - w^{(1)})_{r=a_1} = (v_r^{(2)} - v_r^{(1)})_{r=a_1} = (v_\theta^{(2)} - v_\theta^{(1)})_{r=a_1} = 0, \quad (16)$$

$$(w^{(2)} - w^{(1)})_{r=a_1} = (v_r^{(2)} - v_r^{(1)})_{r=a_1} = (v_\theta^{(2)} - v_\theta^{(1)})_{r=a_1} = 0, \quad (17)$$

$$(w^{(2)} - w^{(1)})_{r=a_1} = (v_r^{(2)} - v_r^{(1)})_{r=a_1} = (v_\theta^{(2)} - v_\theta^{(1)})_{r=a_1} = 0, \quad (18)$$

$$(\sigma_r^{(0)}, \sigma_r^{(1)})_{r=a_1} = \sigma_r^{(2)}_{r=a_1} \quad (19), \quad (\tau_{r\theta}^{(0)}, \tau_{r\theta}^{(1)})_{r=a_1} = \tau_{r\theta}^{(2)}_{r=a_1} \quad (20).$$

と求む。

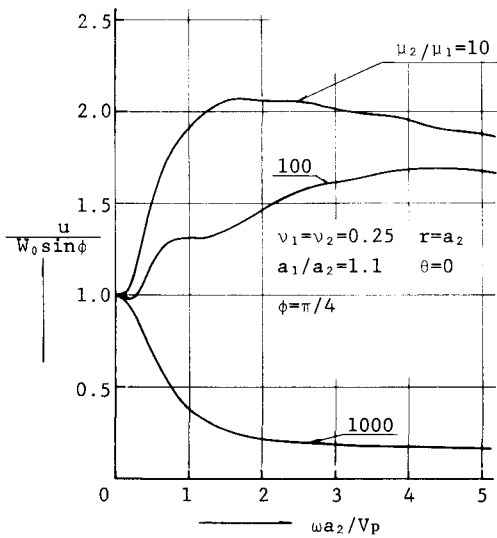


図-2 円筒内面の半径方向変位

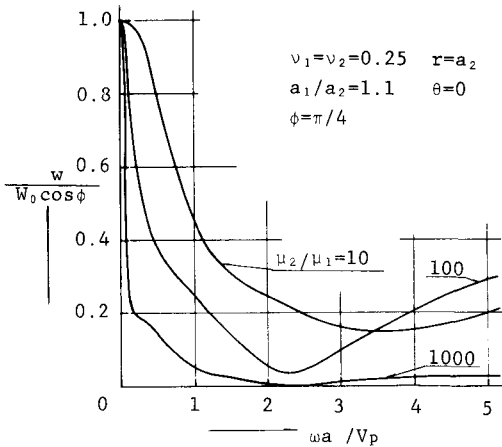


図-3 円筒内面の軸方向変位

4. 数値計算 計算例としてポアソン比 $\nu_1 = \nu_2 = 0.25$ 弾性定数比 $\mu_2/\mu_1 = 10, 100, 1000$, 内外半径比 $a_1/a_2 = 1.1$, 入射角 $\theta = \pi/4$ とした場合の結果の一部を示す。図-2は、円筒の内面における半径方向変位を示したものである。弾性定数比が10, 100の場合には波数の増加とともに大きくなり、最大値をとった後ゆるやかに減少している。 $\mu_2/\mu_1 = 1000$ のものは波数の増加とともに急激に減少している。図-3は、円筒内面の軸方向変位を示したものである。波数の増加によって弾性定数比に関係なく急激に減少しているが、弾性定数比の大きなもの程減少の割合が大きく、変位の拘束が大きい

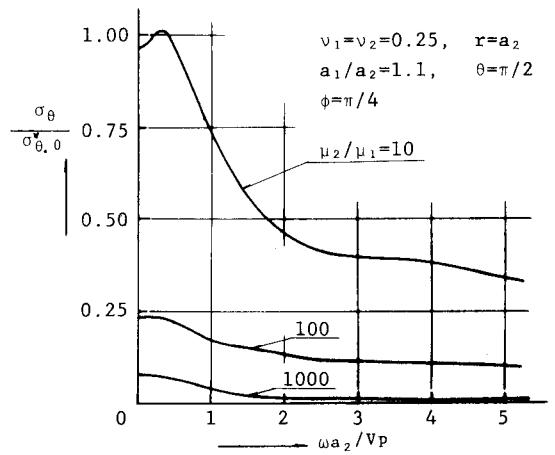


図-4 円筒内面の円周方向応力

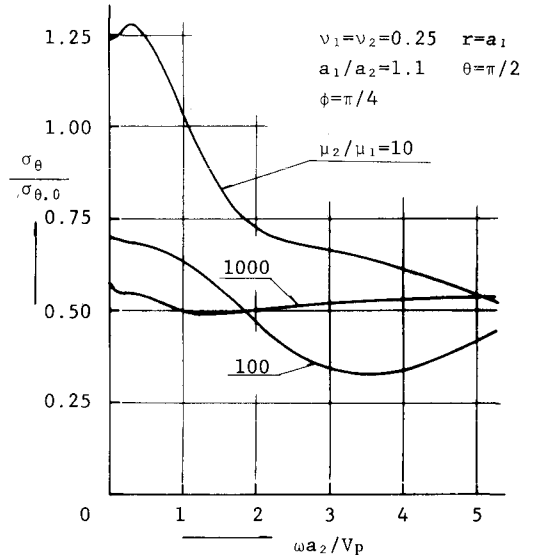


図-5 境界面における弾性体の円周方向応力

いことを示している。

図-4, 5は、円筒内面および境界における弾性体の円周方向応力を示したものである。円筒内面の応力は円筒と同じ弾性定数をもつ弾性体中と伝播する時の応力 $(\sigma_{\theta}^{(0)} = \mu_2/\mu_1 \cdot \sigma_{\theta}^{(1)})_{r=a_2}$ との比で表わしているが、弾性定数比が大きくなると、波数に関係なく小さな値を示している。弾性体の応力は、円筒の存在によって減少するが、弾性定数比の小さなものは波数の小さな範囲で大きな値を示すことがある。

※参考文献

1) 平井 恒武: 第4回學術講義集 第1冊, p493, 1979. 2) 松岡 能町: 北海道学術研究報告集 No.38, p41, 1982. 3) 松岡 能町 和田: 第2回學術講義集 第1冊 p423, 1982.