

岩手大学工学部 正員 ○岩崎 正二
 岩手大学工学部 正員 出戸 秀明
 北海道大学工学部 正員 能町 純雄

1. まえがき

衝撃力を受ける構造物の変形や応力は、静的な荷重下における場合と比べてその様相が異なり工学上興味ある問題である。特に構造物が大型化するに従い、構造物の一部に弾性ショックが作用した場合の過渡的性状の検討はますます重要となってきた。また衝撃現象では物体の接触によって衝撃荷重が発生する関係上、荷重は未知量で解析は両物体間の接触条件を仮定する2体問題となる。従って衝撃力を受ける構造物の初期挙動を正しく把握するためには、まず衝突によって構造物に発生する衝撃荷重を求めなければならない。本報告では、この点を考慮して剛球が弾性床に衝突する問題を衝撃荷重を仮定することなく衝撃速度を与え、接触点においては局部的変形を考慮することにより衝撃力を定める非線型積分方程式を導き数値解析を行なったものである。

2. 解析理論

弾性床上無限平板の中央に剛球が衝突する問題を考える。弾性床上平板のたわみの曲げ振動方程式は極座標を用いて表わすと、次式のようになる。

$$(D\nabla^4 + k + \rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2})w = 0 \quad \dots\dots (1)$$

ここで、

$$\nabla^4 = (\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r})^2, D = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_1^2)}$$

E_1 は板の弾性係数、 ν_1 は板のポアソン比、 h は板の厚さ、 ρ は板の単位体積質量、 k は基礎係数、 w は任意点のたわみを表わす。

また板の中心に剛球が v_0 の速度で衝突する場合、衝撃力を $P(t)$ 、球の質量を M 、球の板へのくいこみを δ とすると剛球の運動方程式は次式のようになる。

$$M(\ddot{w}_0 + \ddot{\delta}) = -P(t) \quad \dots\dots (2)$$

ここで、 w_0 は衝撃点のたわみを表わす。 $\ddot{} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}$

一方、Hertz の接触理論より P と δ の関係を次式のように仮定する。

$$\delta = K P^{\frac{2}{3}} \quad \dots\dots (3)$$

ここで、

$$K^3 = \frac{9\pi^2 (k_1 + k_2)^2}{16 R}, k_1 = \frac{1 - \nu_1^2}{\pi E_1}, k_2 = \frac{1 - \nu_2^2}{\pi E_2}$$

また、 ν_2 、 E_2 はそれぞれ剛球のポアソン比とヤング率を、 R は剛球の半径を表わす。

式(2)を解くと球の変位 $u(t)$ は、

$$u(t) = w_0 + \delta = -\frac{1}{M} \int_0^t P(\tau)(t-\tau)d\tau + v_0 t \quad \dots\dots (4)$$

次に式(1)を接触点について解くと、接触点のたわみ $w_0(t)$ は、

$$w_0(t) = \frac{C_b}{\delta D} \int_0^t P(\tau) J_0(K_b(t-\tau))d\tau \quad \dots\dots (5)$$

ここで、 $C_b^2 = D/\rho h$ 、 $K_b^2 = k/\rho h$ 、 J_0 は0次のベッセル関数を表わす。

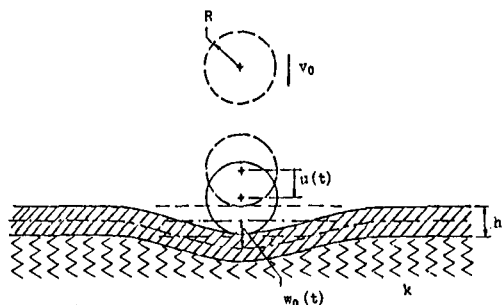


図-1

式(3),(5)を式(4)に代入すると剛球が衝突した場合に発生する衝撃力 P を定める次のような非線型積分方程式が得られる。

$$K P^{\frac{2}{3}}(t) + \frac{C_b}{\delta D} \int_0^t P(\tau) J_0 (K_b(t-\tau)) d\tau + \frac{1}{M} \int_0^t P(\tau) (t-\tau) d\tau = v_0 t \quad \cdots \cdots (6)$$

もし、弾性棒が板の中心に衝突した場合には、同様にして衝撃力 P を定める次のような非線型積分方程式を得る。

$$K P^{\frac{2}{3}}(t) + \frac{C_b}{\delta D} \int_0^t P(\tau) J_0 (K_b(t-\tau)) d\tau + \frac{1}{\rho_b A_b C_r} \int_0^t P(\tau) d\tau = v_0 t \quad \cdots \cdots (7)$$

ここで、 $C_r^2 = E_b/\rho_b$ 、 E_b は棒の弾性係数、 ρ_b は棒の単位体積質量、 A_b は棒の断面積を表わす。

また、四辺が単純に支持された弾性床に平板に剛球が衝突する場合の衝撃力 P を定める非線型積分方程式は次のようになる。

$$K P^{\frac{2}{3}}(t) + \frac{4}{ab\phi h} \sum_{n=1,3,5,\dots} \sum_{m=1,3,5,\dots} \int_0^t P(\tau) \frac{\sin C_{mn}(t-\tau)}{C_{mn}} d\tau + \frac{1}{M} \int_0^t P(\tau) (t-\tau) d\tau = v_0 t \quad \cdots \cdots (8)$$

ここで、 $C_{mn}^2 = \frac{D}{\phi h} \left\{ \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right\} + \frac{k}{\phi h}$ 、 a, b は2辺の長さを表わす。

3. 数値計算例

数値計算は無限長の平板に剛球が衝突する問題を扱った。また計算にあたっては次のような数値を用いた。

板厚 $h = 6, 9, 12$ (cm)
 $E_1 = 3.0 \times 10^6$ (kg/cm²) , $v_1 = 1/6$
 $E_2 = 2.1 \times 10^6$ (kg/cm²) , $v_2 = 0.3$
 $\rho_1 = 0.234 \times 10^{-5}$ (kg・sec²/cm⁴)
 $\rho_2 = 0.801 \times 10^{-5}$ (kg・sec²/cm⁴)
 $k = 100$ (kg/cm³)
 $R = 5$ (cm)
 $v_0 = 500$ (cm/sec)

図-2 は平板の衝撃点での衝撃力およびたわみの時間的変動を表わしたものである。

なお数値積分に際してはシンプソンの1/3則あるいは3/8則を使い、時間の刻みは5 μsecとした。

参考文献

Zener, C., "The Intrinsic Inelasticity of Large Plates," Physical Review, Vol. 59, 1941, p 669
 K.E. BARNHART, WERNER GOLDSMITH: Stress in Beams During Transverse Impact, Journal of Applied Mechanics, SEPT, 1957

J.W. PHILLIPS, H.H. CALVIT., "Impact of a Rigid Sphere on a Viscoelastic Plate," Journal of Applied Mechanics, DECE, 1967, p873

岩崎正二, 能町純雄, 弾性球による無限長はりの横衝撃について, 第37回土木学会全国大会講演概要集 p. 405

岩崎正二, 出戸秀明, 青井裕昭, 弾性球により衝撃されたはりの初期挙動について, 昭和57年度東北支部技術研究発表会講演概要, p. 29

チモシェンコ, 工業振動学

日高孝次, 数値積分法

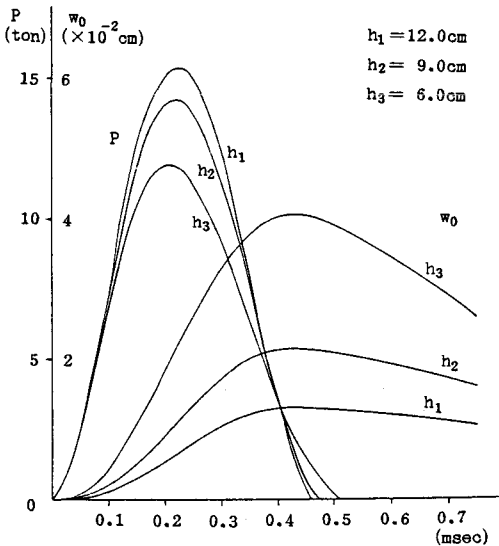


図-2