

京都大学工学部 正員 〇廣瀬社一
京都大学工学部 正員 丹羽義次

1. はじめに くさび型領域における波動の散乱問題は、弾性学、地震学、電磁気学、音響学など、様々な分野において取り上げられ、古くからその解析が行われてきた。例えば、弾性学においては、弾性体中のクラックなどによる波の散乱問題の解析がなされ、地震学においては、傾斜基礎を有する地盤の地震動解析などが行われている。さらに、電磁気学、音響学の分野においては、くさび型障害物による電磁波、あるいは音波の回折現象の解析が数多く行われている。このような中で、本研究においては、くさび型線形弾性体における平面弾性波の散乱問題を積分方程式法を用いて解析するものである。

2. 積分方程式による定式化 くさび型領域における定式化を行う前に、Fig.1に示すようなより一般的な領域における積分方程式の定式化について述べることにする。解析の対象とする領域 D は、均質等方線形弾性体であり、 $D_0, D_1, \dots, D_n$ の $(n+1)$ コの小領域から成る(説明を簡単にするためにFig.1のように整然とした小領域に分割したが、ランダムに分割しても同様な議論が成り立つ)と仮定する。すなわち、

$$\mathbb{L}u(x) \equiv (\lambda + \mu)\nabla \nabla \cdot u(x) + \mu \nabla^2 u(x) + \rho \omega^2 u(x) = 0, \quad x \in D \quad (1)$$

が成り立っている。ただし、 λ, μ : Laméの定数、 ρ : 密度、 ω : 角周波数、 u : 変位ベクトルである。

さて、小領域 D_i における全変位 u_i が、ある既知な変位 u_i^* と未知な変位 $\tilde{u}_i$ の和で表わされているとする。この時、小領域 D_i における未知変位 $\tilde{u}_i$ について次の積分表示式を得ることができる。

$$g_i(x) \tilde{u}_i(x) = \int_{\partial D_i} \{ \mathbb{U}(x, y) \cdot \hat{e}_i(y) - \Pi(x, y) \cdot \hat{u}_i(y) \} ds + \int_{\partial D_i} \{ \mathbb{U}(x, y) \cdot \hat{e}_i(y) - \Pi(x, y) \cdot \hat{u}_i(y) \} ds + \int_{\partial D_i} \{ \mathbb{U}(x, y) \cdot \hat{e}_i(y) - \Pi(x, y) \cdot \hat{u}_i(y) \} ds \quad (i=0, 1, \dots, n) \quad (2)$$

ここで、 $\hat{e}_i(x) = \nabla \tilde{u}_i(x) \equiv \lambda \nabla (\nabla \cdot \tilde{u}_i(x)) + \mu \nabla (\nabla \cdot \tilde{u}_i(x) + \tilde{u}_i(x) \cdot \nabla)$ 、 $g_i(x) = 1$ ($x \in D_i$)、 V_2 ($x \in \partial D_i, \partial S_i, \partial S_{in}$)、 0 ($x \in D_i^c, D_i^c$ は D_i の補領域)、 m は ∂D_i においては D_i からの外向き法線ベクトル、 ∂S_i においては D_{i-1} から D_i への法線ベクトルを表わす。また、 $\mathbb{U}(x, y)$ は、 $\mathbb{L} \mathbb{U}(x, y) = -\delta(x-y)$ を満たす基本解であり、 $\Pi(x, y) = \mathbb{U}(x, y) \cdot \hat{y}$ である。

次に、式(2)で表わされる $(n+1)$ コ方程式を辺々加え、整理すると次式を得る。

$$\tilde{u}_i(x) = \int_{\partial D_i} \{ \mathbb{U}(x, y) \cdot \hat{e}_i(y) - \Pi(x, y) \cdot \hat{u}_i(y) \} ds + \int_{\partial D_i} \{ \mathbb{U}(x, y) \cdot \hat{e}_i(y) - \Pi(x, y) \cdot \hat{u}_i(y) \} ds + \int_{\partial D_i} \{ \mathbb{U}(x, y) \cdot \hat{e}_i(y) - \Pi(x, y) \cdot \hat{u}_i(y) \} ds, \quad x \in D_i \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \tilde{u}_i(x) = \int_{\partial D_i} \{ \mathbb{U}(x, y) \cdot \hat{e}_i(y) - \Pi(x, y) \cdot \hat{u}_i(y) \} ds + \int_{\partial D_i} \{ \mathbb{U}(x, y) \cdot \hat{e}_i(y) - \Pi(x, y) \cdot \hat{u}_i(y) \} ds + \int_{\partial D_i} \{ \mathbb{U}(x, y) \cdot \hat{e}_i(y) - \Pi(x, y) \cdot \hat{u}_i(y) \} ds, \quad x_0 \in \partial D_i \quad (4)$$

ただし、式(3)、(4)を導く時に、 $x \in \partial S_i$ における境界条件として、 $u_{i-1}(x) = u_i(x)$ 、 $\hat{e}_{i-1}(x) = \hat{e}_i(x)$ を用いた。

式(4)より明らかのように、 $x_0 \in \partial D_i$ において、境界条件： $\tilde{u}_i(x_0) = g(x_0)$ ($x_0 \in \partial D_i^*$)、 $\hat{e}_i(x_0) = h(x_0)$ ($x_0 \in \partial D_i^*$) ($g(x_0), h(x_0)$ は与えられた関数、 $\partial D_i^* = \partial D_i \cup \partial D_i^*$ 、 $\phi = \partial D_i \cap \partial D_i^*$)が与えられれば、離散化を行うことによって、数値的に未知数である $\tilde{u}_i(x_0)$ ($x_0 \in \partial D_i^*$)、並びに $\hat{e}_i(x_0)$ ($x_0 \in \partial D_i^*$)を求めることができ、さらに式(3)により、任意の領域 D_i における変位 $\tilde{u}_i(x)$ を求めることができる。

3. くさび型領域における平面波散乱問題の解析例

解析モデル 本節では、くさび型領域における平面波散乱問題の簡単な例として、Fig.2に示すような角度 α ($0 < \alpha < \pi$)なる二次元くさび型領域 D ($D_0 + D_1$)でのSH波を考える。その支配方程式は、

$$\mathbb{M}u(x) \equiv \mu \nabla^2 u(x) + \rho \omega^2 u(x) = 0 \quad (5)$$

であり、境界条件は、 $t(x_0) = \mu \frac{\partial u}{\partial n}(x_0) = 0$ ($x_0 \in \partial D_0, \partial D_1$)により与えられているとする。さて、Fig.2のように、平面入射SH波 $u^i(x)$ が、

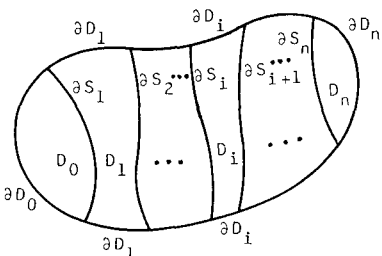


Fig. 1 解析領域

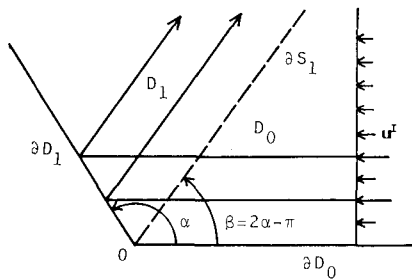


Fig. 2 解析モデル

境界 ∂D_1 に沿って入射した場合、境界 ∂D_1 によって、反射波 $u^R(x)$ が領域 D_1 において発生する。さらに、 ∂S_1 における入射波と反射波の不連続性によって、領域 D_0 、および D_1 においてそれぞれ回折波 $u_0^D(x)$ 、 $u_1^D(x)$ が発生する。ただし、 $u^I(x)$ 、 $u^R(x)$ は、波動論により、次のように容易に求められる。

$$u^I(x) = A^I e^{i\lambda \cdot (k \cos \alpha \sin \beta, k \sin \alpha \sin \beta)} \quad (x \in D_0, D_1), \quad u^R(x) = A^I e^{i\lambda \cdot (k \cos \alpha \sin \beta, k \sin \alpha \sin \beta)} \quad (x \in D_1) \quad (6)$$

ここで、 $k = \omega \sqrt{\rho \mu}$ 、 A^I : 入射波の振幅である。

境界積分方程式の構成 前節で述べた定式化において、 $v=1$ 、 $u_0^*(x) = u^I(x)$ 、 $u_1^*(x) = u^I(x) + u^R(x)$ 、 $\hat{u}_0(x) = u_0^D(x)$ 、 $\hat{u}_1(x) = u_1^D(x)$ などと置換し、さらに、 $z^i(x) = 0$ ($x \in \partial S_1$) と境界条件を考慮することにより、式(4)に対応する次の境界積分方程式を得ることができる。

$$\frac{1}{2} u_0^D(x_0) = - \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\partial D_k} T(x_0, y) u_k^D(y) dy - \int_{\partial S_1} T(x_0, y) u^R(y) dy \quad (x_0 \in \partial D_0, i=0,1) \quad (7)$$

ただし、基本解 $U(x, y)$ は、 $M U(x, y) = -\delta(x-y)$ を満足する $U(x, y) = \frac{1}{4\pi} H_0^{(1)}(kr)$ ($H_0^{(1)}$: 第一種0次Hankel関数、 $r = |x-y|$) であり、 $T(x, y) = \mu \frac{\partial}{\partial n_y} (U(x, y))$ である。

積分 $K \equiv \int_{\partial S_1} T(x_0, y) u^R(y) dy$ の評価 式(7)を離散化して、数値的に解析を行う前に、式(7)の既知なる最後の項、すなわち $\int_{\partial S_1} T(x_0, y) u^R(y) dy$ を正確に評価する必要がある。そこで、 K を具体的に書き下し、整理すれば、次のようになる。

$$\begin{aligned} K &= \int_0^{\infty} \mu \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{1}{4\pi} H_0^{(1)}(kr) \right) A^I e^{ik|y|} d|y| \\ &= \frac{i}{4} (\lambda \cdot n_y) \int_0^{\infty} H_1^{(1)}(kr) \frac{e^{-k|y|}}{r} d|y| \\ &= \frac{i}{4} (\lambda \cdot n_y) \left[\int_0^{\delta} H_1^{(1)}(kr) \frac{e^{-k|y|}}{r} d|y| + \int_{\delta}^{\infty} H_1^{(1)}(kr) \frac{e^{-k|y|}}{r} d|y| \right] \end{aligned} \quad (8)$$

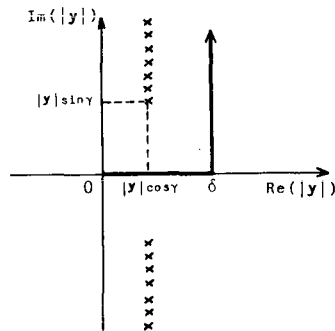


Fig. 3 積分経路

ただし、式(8)においては、 $|y|$ を複素平面に拡張して、Fig. 3に示すように、積分経路を変換した。なお、Fig. 3における δ は x と y のなす角であり、 $\delta > |y| \times \cos \delta$ である。さて、式(8)を解析的に積分することは容易ではないので、本研究においては、式(8)の第一項をガウス積分、第二項をラゲール積分により、数値的に積分を行った。

数値解析例 数値解析例として、くさびの角度 α が 120° の場合を解析した。したがって、この場合は、 $\beta = 60^\circ$ において、入射波と反射波による不連続境界 ∂S_1 が生じ、回折波が発生することになる。数値解析においては、半無限境界 ∂D_0 、あるいは ∂D_1 を無限遠まで積分することはできないので、ここでは、入射波長の約3倍の長さで打ち切り、積分の離散化に際しては、一波長に少なくとも3節点が含まれるように分割した。その結果をFig. 4に示す。これは、境界 ∂D_0 、および ∂D_1 上の変位を表しており、横軸に波数 k で無次元化したくさび頂点からの距離 kr 、縦軸に、入射波振幅 A^I で無次元化した全変位 u/A^I をとった。この問題に対しては、R. Sato¹⁾が級数解を用いて解析を行っている。その結果との比較によれば、境界 ∂D_0 、 ∂D_1 を打ち切った近傍において、多少、精度が落ちる他は、数パーセントの相対誤差で解が求められている。以上のように、回折波 u^D について積分方程式を構成することにより、くさび型領域においても高精度の解が求められることが示された。また、平面P、SV波の散乱問題についても、同様な解析法により、変位などを求めることができる。

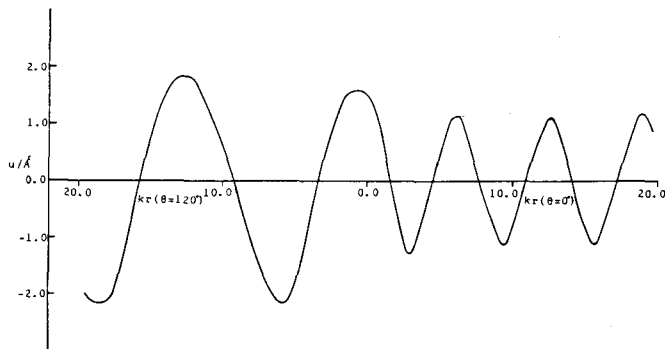


Fig. 4 境界 ∂D_0 、 ∂D_1 上における変位

参考文献

- 1) Sato, R., J. Phys. Earth, Vol. 11, pp. 1-17, 1963.