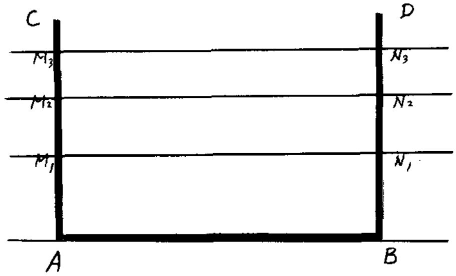
I-45　摩擦減衰のある埋設ラーメンの強制振動

信州大学正員　○夏目正太郎
〃　〃　石川清志

§1. まえがき

内部摩擦のある骨組構造物が、弾性地盤内に置かれ、強制振動させられる場合の解を求めるものである。構造物の強制振動は、3つの問題を総合して得られるのである。すなわち、(1) 固有値問題、(2) 境界値問題、(3) 初期値問題である。骨組構造物であるから、その単位となる棒状弾性体のたわみ振動，伸縮振動 あるいはねじれ振動の組合せによって全体の挙動をあらわすことが出来る。故に基本になる微分方程式はよく知られたものを用いて、これらの一般解と特解の和によって表わすことになる。ここでは平面ラーメンを扱う。



外力は演算子構造解析で用いている荷重マトリクス[1]として、任意の位置に作用させ、周辺からの土圧や、自重は、質量マトリクス[2]の概念で取り入れる。地層はWinklerのバネ定数を仮定し、弾性床上の梁の振動とする。

§2. 状態量

(i) 伸縮振動

$$\frac{EA}{L^2}\left(1+\varepsilon_u\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2}-\frac{\gamma A}{g}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}-k_u U = q_u e^{ipt} \qquad (1)$$

$$U = U_h + U_p \qquad (2)$$

U_h は同次解であり、U_p は特解を示す。したがって

$$U_h = \lfloor \cos\mu\rho \quad \sin\mu\rho \rfloor \mathbf{M}_h e^{i\omega t} \qquad (3)$$

$$\mu^2 = \left(\frac{\gamma A\omega^2}{g} - k_u\right)\frac{L^2}{(1+i\varepsilon_u\omega)EA} \qquad (4)$$

$\mathbf{M}_h$：未定定数（固有マトリクス）

附加質量を考慮するときは質量マトリクス $\mathbb{C}_u(\rho)$ が挿入され

$$U_h = \lfloor \cos\mu\rho \quad \sin\mu\rho \rfloor \mathbb{C}_u(\rho)\mathbf{M}_h e^{i\omega t} \qquad (5)$$

と書かれる。

特解は外力による荷重マトリクス $\mathbf{K}_u(\kappa)$ が加わり、

$$U_p = \lfloor \cos\mu'\rho \quad \sin\mu'\rho \rfloor \mathbb{C}'_u(\rho)[\mathbf{M}_p + \langle \mathbf{K}_u(\kappa)\rangle] e^{ipt}$$

$$\mu'^2 = \left(\frac{\gamma A p^2}{g} - k_u\right)\frac{L^2}{(1+i\varepsilon_u p)EA} \qquad (6)$$

(ii) たわみ振動

$$\frac{EI}{L^4}\left(1+\varepsilon_w\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial \rho^4}+\frac{\gamma A}{g}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+k_w w = q_w e^{ipt} \qquad (7)$$

$$w = w_h + w_p \qquad (8)$$

添字の h は同次解で p は特解を示す。

$$w_h = \lfloor \cos\nu\rho \quad \sin\nu\rho \quad \mathrm{ch}\,\nu\rho \quad \mathrm{sh}\,\nu\rho \rfloor \mathbf{N}_h e^{i\omega t} \qquad (9)$$

$$\nu^4 = \left(\frac{\gamma A\omega^2}{g} - k_w\right)\frac{L^4}{(1+i\varepsilon_w\omega)EI} \qquad (10)$$

$\mathbf{N}_h$：未定定数（固有マトリクス）

同様に附加質量があるときは $\mathbb{C}_w(\rho)$ が入る。

$$w_h = \lfloor \cos\nu\rho \quad \sin\nu\rho \quad \mathrm{ch}\,\nu\rho \quad \mathrm{sh}\,\nu\rho \rfloor \mathbb{C}_w(\rho)\mathbf{N}_h e^{i\omega t} \qquad (11)$$

特解は荷重マトリクス $\mathbf{K}_w(\kappa)$ が加わり

$$w_p = \lfloor \cos\nu'\rho \quad \sin\nu'\rho \quad \mathrm{ch}\,\nu'\rho \quad \mathrm{sh}\,\nu'\rho \rfloor \mathbb{C}'_w(\rho)[\mathbf{N}_p + \langle \mathbf{K}_w(\kappa)\rangle] \cdot e^{ipt} \qquad (12)$$

$$\nu'^4 = \left(\frac{\gamma A p^2}{g} - k_w\right)\frac{L^4}{(1+i\varepsilon_w p)EI}$$

線材形の弾性体の振動としては平面構造の場合は上記の2方向の挙動の単純な組合せで充分である。故に構造物としての状態量もこれらの変位から誘導されるものの組合せでよい。同次解で示せば

伸縮：$u = \lfloor \cos\mu\rho \quad \sin\mu\rho \rfloor \mathbf{M} e^{i\omega t}$

軸力：$F = \frac{\mu EA}{L}\lfloor -\sin\mu\rho \quad \cos\mu\rho \rfloor \mathbf{M} e^{i\omega t}$

たわみ：$w = \lfloor \cos\nu\rho \quad \sin\nu\rho \quad \mathrm{ch}\,\nu\rho \quad \mathrm{sh}\,\nu\rho \rfloor \mathbf{N} e^{i\omega t}$

たわみ角：$\theta = \frac{\nu}{L}\lfloor -\sin\nu\rho \quad \cos\nu\rho \quad \mathrm{sh}\,\nu\rho \quad \mathrm{ch}\,\nu\rho \rfloor \mathbf{N} e^{i\omega t}$

曲げモーメント：$M = \frac{-\nu^2 EI}{L^2}\lfloor -\cos\nu\rho \quad -\sin\nu\rho \quad \mathrm{ch}\,\nu\rho \quad \mathrm{sh}\,\nu\rho \rfloor \mathbf{N} e^{i\omega t}$

せん断力：$S = \frac{-\nu^3 EI}{L^3}\lfloor \sin\nu\rho \quad -\cos\nu\rho \quad \mathrm{sh}\,\nu\rho \quad \mathrm{ch}\,\nu\rho \rfloor \mathbf{N} e^{i\omega t}$ (13)

となるので、同次解，特解をそれぞれ記号的に書けば状態量は

$$W_h(p) = D_r R_r(p) C_r(p) X_h e^{i\omega t} \quad ; \quad W_p(p) = D_r R_r(p) C_r(p)[X_p + \langle K(x) \rangle] e^{ipt} \qquad (14)$$

である。この中の固有マトリクス X_h, X_p を求めることによって、状態量を知ることが出来るのであって、そのためには、同次解から固有値方程式と境界条件にて求め、振動の固有値を定めなければならないし、また特解からは同じ様に境界条件によって、固有マトリクス X_p を決定する問題になる。故にこの様な門型ラーメンでは、底部の水平部材の状態量を、ラーメン隅角部 A, B をすり抜けて、地盾を移行し、C 端，D 端の自由境界端へ到達させる演算を行えばよい。

(i) 同次解の移行演算

状態量は隣接する部材間には単なる射影による連続条件で結びつけることが出来る。射影マトリクスを $\mathbb{I}$ とすれば

$$W_{r+1}(0) = \mathbb{I} \cdot W_r(P) \qquad (15)$$

p : A 点では 0 をとり、その他は 1.

$\mathbb{I}$: A 点では $\mathbb{I}_A$, B 点では $\mathbb{I}_B$ その他は E.

移行演算は漸化式として

$$X_k = G_{k-1} X_1 \qquad (16)$$

で示される。

(ii) 特解の移行演算

同次解と同様になるが、荷重マトリクスが加えられるのでその部分のみ記法を異にする。

$$X_k = G_{k-1} X_1 + P_{k-2} + \langle K(x) \rangle_{k-1} \qquad (17)$$

(iii) 境界条件

今、この図のように取れば自由境界であるので C 端も D 端も、軸力，曲げモーメント，せん断力が消滅する。

すなわち

$$B' = \begin{bmatrix} -\sin\mu & \cos\mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\cos\upsilon & -\sin\upsilon & ch\upsilon & sh\upsilon \\ 0 & 0 & \sin\upsilon & -\cos\upsilon & sh\upsilon & ch\upsilon \end{bmatrix} C(l)$$

$$B' X_\ell = 0 \qquad (18)$$

である。

§ 3. 固有値方程式

C 端，D 端にて式(18) を造り、移行演算の結果式(16)を代入すれば

$$\begin{bmatrix} B'_c\, G_{c\,l-1} \\ B'_D\, G_{D\,l-1} \end{bmatrix} X_1 = 0 \qquad (19)$$

となり X_1 のすべての要素が 0 でないので、

$$\begin{vmatrix} B'_c\, G_{c\,l-1} \\ B'_D\, G_{D\,l-1} \end{vmatrix} = 0 \qquad (20)$$

となるべきである。これが固有値方程式となる。固有振動数 ω が求まるとそれを式(19) に代入し、X_1 にある未定定数の 1 つを Ω で表わすとすれば

$$X_1 = \mathbb{P}(\omega)\,\Omega \qquad (21)$$

となる。

§ 4. 固有マトリクス（特解）

式(17) を同次解と同様に式(18) に代入すれば、C 端と D 端とを一緒にまとめ

$$B'\, G_\ell X_{p1} = -B'[P_{\ell-1} + K(x)] \qquad (22)$$

より固有マトリクス X_{p1} ができる。これで特解による状態量はすべて既知となったわけである。

§ 5. 初期条件

外力が作用して振動が開始されるのであるとすれば時間 $t=0$ のとき静止の状態にある。これを初期条件とすれば、伸縮，たわみ，それらの変位速度ともって 0 とする。構造物としては、全体の水平方向，鉛直方向の変位とその変位速度を 0 とすることになる。

これら構造物の変位を Fourier 級数で表わすとすれば、未定係数 Ω_n を含む連立方程式を造ることが出来る。それを

$$A_{nn}\,\Omega_n = B_n \qquad (23)$$

と記せば、A_{nn} は Fourier 係数により出来るマトリクス，B_n も同様である。A は同次解，B は特解。ここにおいて、すべて既知量となったので、各部材の状態量は

$$W(p) = \sum_n^{n} D_r R_r(p) C(p)\, \overset{G_{r}}{\mathbb{P}_n}(\omega)\, \Omega_n e^{i\omega_n t} + D_r R_r(p) C_r(p)[G_r X_1 + P_{r-1} + \langle K(x)_r \rangle] e^{ipt} \qquad (24)$$

で求まる。

参考文献

[1] 谷本・石川 共著：演算子法構造解析 I （森北出版）

[2] 谷本勉之助 著：マトリクス構造解析 （日刊工業出版）