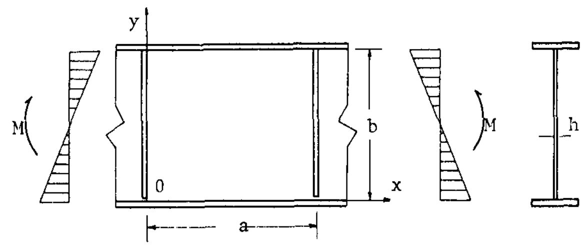
I-38　面内曲げを受ける長方形板の動的安定問題

長崎大学工学部　正員 ○高橋和雄
長崎大学工学部　学生員　田川賢　松川徹
長崎大学工学部　学生員　池田虎彦

1.まえがき　面内曲げを受けるプレートガーターの腹板の上部と上フランジとの溶接部分に疲労クラックが生じたり、腹板の振動による騒音が生ずることが知られている。この原因はプレートガーターの腹板に面外変形が生ずることによるものである。この面外変形の要因としては腹板の初期変形[1]や面外係数励振振動[2]などが挙げられている。しかし、まだ面外係数励振振動の立場からの解析的な取り扱いは未だ見受けられないようである。そこで本研究は面内変動曲げを受ける長方形板に面外係数励振振動が生ずる可能性を検討したものである。

2.解法　図-1に示すように、腹板を鉛直補剛材で区切られた1枚の長方形板を考える。この長方形板に死荷重による曲げモーメントM_0と桁の曲げ変形に起因する変動曲げモーメント$M_t\cos\Omega t$が作用する。長方形板の境界条件は荷重辺を単純支持、上下フランジの溶接部分を固定とする。図-1のような座標系のもとにおける長方形板の面外振動の運動方程式は次のように与えられる。



図−1　一般図および座標系

$$\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+D\nabla^4 w-(\sigma_0+\sigma_t\cos\Omega t)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \quad (1)$$

ここに、ρ：板の密度、h：板厚、w：たわみ、t：時間

$D=Eh^3/\{12(1-\nu^2)\}$：板剛度、E：ヤング率、h：板厚、ν：ポアソン比、$\sigma_0=\frac{6}{b^2}(1-2\frac{y}{b})M_0$：静的曲げ応力

$\sigma_t=\frac{6M_t}{b^2}(1-\frac{2y}{b})M_t$：変動曲げモーメントの振幅、$b$：腹板の高さ、$a$：鉛直補剛材の間隔

式(1)の解を次のように仮定する。$w=\sum_{n=1}^{\infty}T_{mn}(t)\sin\frac{m\pi x}{a}\overline{W}_n(y)$　(2)　ここに、T_{mn}：未知の時間関数、$n=1,2,\cdots$

$\overline{W}_n(y)=\sum_{i=1}^{\infty}a_i^n\{\sin\frac{(i-1)}{b}\pi y-\sin\frac{(i+1)}{b}\pi y\}$：線形振動の基準関数

式(2)を式(1)に代入して、Galerkin法を適用すれば、次のような運動方程式が得られる。

$$\omega^2[A]\{\ddot{T}_m\}+[B]\{T_m\}+(\bar{M}_0[C]+\bar{M}_t[D]\cos\tau)\{T_m\}=\{0\} \quad (3)$$

ここに、$\omega=\Omega/\omega_1$：振動数比、ω_1：長方形板の1次の固有振動数、$\bar{M}_0=M_0/M_{cr}$：無次元初期荷重、M_{cr}：長方形板の面内曲げモーメントによる座屈荷重

$\bar{M}_t=M_t/M_{cr}$：無次元変動曲げモーメント荷重、$[A]$、$[B]$：対角行列、$[C]$、$[D]$：定積分$I_{ns}=\int_0^b(1-2\frac{y}{b})\overline{W}_n W_s\,dy$を要素の係数とする行列で対角線成分はゼロである。$\{T_m\}=\{T_{m1},T_{m2},\cdots T_{mn}\cdots\}^T$

式(3)の解を次のように仮定する。[3]　$\{T_m\}=e^{\lambda\tau}\{\frac{1}{2}\mathbb{b}_0+\sum_{m=1}^{\infty}(\mathbb{a}_m\sin m\tau+\mathbb{b}_m\cos m\tau)\}$　(4)

ここに、$\mathbb{b}_0$、$\mathbb{a}_m$、$\mathbb{b}_m$：未知ベクトル、λ：未定々数

式(4)を式(3)に代入すれば、次のような2倍サイズの固有値問題に変換される。

$$\begin{bmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{I} \\ \mathbb{M}_2^{-1}\mathbb{M}_1 & -\mathbb{M}_2^{-1}\mathbb{M}_0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \mathbb{X} \\ \mathbb{Y} \end{Bmatrix}=\lambda\begin{Bmatrix} \mathbb{X} \\ \mathbb{Y} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

ここに、$\mathbb{M}_0$、$\mathbb{M}_1$、$\mathbb{M}_2$：λの0、1、2次の係数行列、$\mathbb{Y}=\lambda\mathbb{X}$

$\mathbb{X}=\{\mathbb{b}_0,\mathbb{b}_1,\mathbb{b}_2\cdots\mathbb{a}_1,\mathbb{a}_2\cdots\}^T$

式(5)の固有値の性質を明らかにすることによって、解の安定性が直接明らかにされる。

3.腹板の動的安定性の基本的性質　式(3)の微分方程式の不安定領域には次の2種類がある。

$\omega=2\omega_i/k$　単純共振
$\omega=(\omega_i\pm\omega_j)/k$　結合共振　(6)

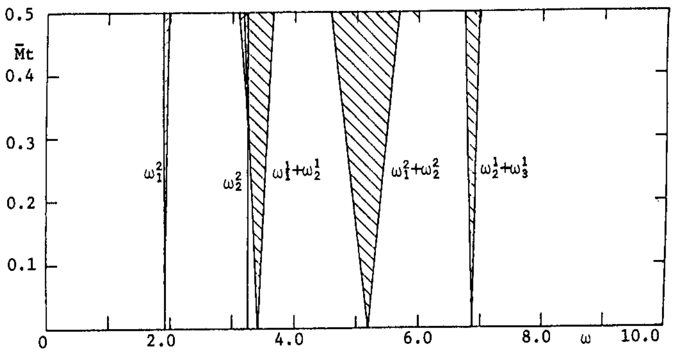
$k=1,2\cdots$、$k=1$　主不安定領域、$k\geq 2$　副不安定領域、$+$：和形、$-$：差形

表-1 [D]の要素

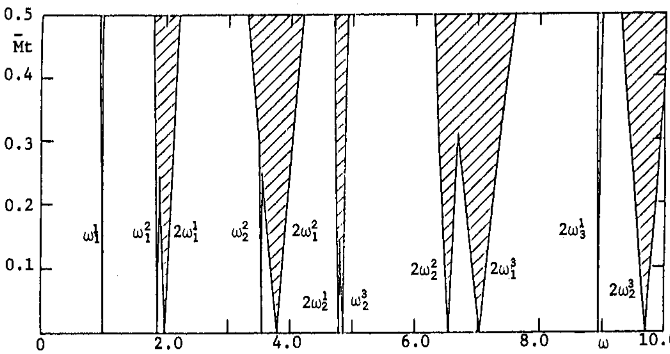
曲げモーメント荷重の場合	一様圧縮力の場合
$[D]=\begin{bmatrix} 0 & d_{12} & 0 & d_{14} \\ d_{21} & 0 & d_{23} & 0 \\ 0 & d_{32} & 0 & d_{34} \\ d_{41} & 0 & d_{43} & 0 \end{bmatrix}$	$[D]=\begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{44} \end{bmatrix}$

表-1は本題の曲げモーメント荷重$\bar{M}_t$および一様圧縮力$\bar{N}_x$の場合の行列[D]の構成を示すものである。これより、一様圧縮力の場合には$d_{ij}=0$であるから、単純共振のみが存在する。これに対して、曲げモーメント荷重の場合には$d_{ii}=0$であるから、単純共振は重要でない。また、$d_{ij}=d_{ji}$より、結合共振は和形のみが存在する。結合共振については例えば$d_{12}\neq0$、$d_{14}\neq0$、$d_{23}\neq0$、$d_{34}\neq0$から明らかなように1次と2次、1次と4次、2次と3次、3次と4次の間の結合共振のみが存在する。

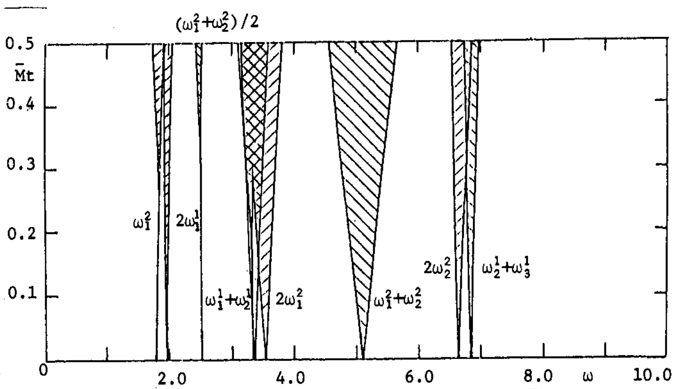
4.不安定領域 図-2は面内曲げモーメント荷重を受ける正方形板の不安定領域である。横軸は加振振動数Ωを正方形板の1次の固有振動数ω_1で無次元化した振動数比ωである。縦軸は無次元変動曲げモーメント$\bar{M}_t$である。図中の右下りの斜線部$\omega_1^M+\omega_2^M$、$\omega_2^M+\omega_3^M$などが結合共振で、右上りの斜線部ω_1^M、ω_2^Mなどが単純共振である。図のように結合共振が単純共振よりも重要で、特に座屈波形に関係するy方向の波数が2の$\omega_1^2+\omega_2^2$の結合共振の不安定領域が最も広いと言える。比較対照のために、一様圧縮力$\bar{N}_x$を受ける正方形板の不安定領域を図-3に示す。単純共振の主・副不安定領域のみが存在し、結合共振は存在しない。図-2・3の比較から明らかなように、不安定振動の生ずる位置は負荷形式によって著しく異なると言える。



図－2 変動曲げによる正方形板の不安定領域 ($\bar{M}_0=0$)



図－3 一様変動圧縮力による正方形板の不安定領域



図－4 変動曲げによる正方形板の不安定領域 ($\bar{M}_0=0$)

図-4は不安定領域に及ぼす静曲げモーメント荷重$\bar{M}_0$の影響を示したものである。図のように、静荷重$\bar{M}_0$の存在は単純共振の不安定領域を広める効果をもつ。

5.プレートガーダーの腹板への応用 鉄道橋のプレートガーダーについて数種の設計例から、面外不安定振動に関係する諸元を調査したところ、$\bar{M}_0=0.2$、$\bar{M}_t=0.1$（活荷重成分）、$\omega=0.3\sim4.5$程度であった。これより、実橋においても生ずる可能性がある。今後、実橋における計測および模型実験の必要があるものと考えられる。

6.まとめ 本研究によって面内曲げモーメント荷重を受けるプレートガーダーの腹板の面外不安定領域は結合共振が重要であることが明らかにされた。静曲げモーメント荷重が長方形板の固有振動数，振動形に及ぼす影響，不安定領域に及ぼす辺長比の影響，支持条件の影響は講演時に発表する。

参考文献 1)前田・大倉：土木学会論文報告集、第319号、1982. 3 2)倉西，嶋：第37回年次講演会概要集、第1部、I-61、1982. 3) K. Takahashi : J. Sound and Vibration, Vol. 85(2), 1982.