I-37　応答共分散漸化式の定式化

武蔵工業大学　正会員　星谷　勝
同　大学院　学生員　○渋沢　重彦
同　大学院　学生員　永田　茂

1．はじめに

構造物の動的応答解析では応答スペクトル曲線や特定の地震動を用いた決定論的手法のほかに確率論手法もしばしば用いられている。この確率論手法による動的解析の利点の１つは，構造物の最大応答量を確率・統計的に評価できることである。さて，確率論手法により最大応答の理論解を算出する場合には応答共分散値が必要となるため，応答共分散値を効率よく算出するための手法[1]がいくつか提案されている。そこで，本研究では既往の研究を検討した上で，入力の一般化および理論式の簡素化を計るため入力を時系列モデルの自己回帰モデル（ARモデル）で表現し，各時刻における応答共分散を漸化的に算出することのできる効率的な理論式を誘導した。

2．応答共分散漸化式の誘導

・(a)基本振動方程式

非減衰の線形多自由度系構造物の基本振動方程式は，一般的に(1)式のように表現できる。

$$M\ddot{x} + Kx = -MI\,\ddot{z}_0(t) \qquad \text{-------------(1)}$$

ただし，M：質量マトリックス$(n\times n)$，K：剛性マトリックス$(n\times n)$，I：入力条件を満足させるためのマトリックス$(n\times m)$，x：相対変位応答ベクトル$(n\times 1)$，$\ddot{z}_0(t)$：入力地震動ベクトル（加速度）$\ddot{z}_0(t)=[\ddot{z}_{01}(t), \ddot{z}_{02}(t),\cdots,\ddot{z}_{0m}(t)]^T\ (m\times 1)$

(1)式の解を(2)式のように置く。

$$x = \Phi y \qquad \text{-------------(2)}$$

ただし，Φ：正規化したモードマトリックス$(n\times n)$，y：一般化座標ベクトル$(n\times 1)$

(2)式を(1)式に代入して整理すると，

$$\ddot{y} + \Omega^2 y = -R\ddot{z}_0(t) \qquad \text{-------------(3)}$$

ただし，Ω：固有円振動数ω_iを要素とするマトリックス$(n\times n)$，R：刺激係数マトリックス$(n\times m)$ $R=\Phi^T MI$

(3)式を各モードに対応する式に分離して減衰定数β_iを導入すると，

$$\ddot{y}_i + 2\beta_i\omega_i\dot{y}_i + \omega_i^2 y_i = -\sum_{\ell=1}^{m} R_{i\ell}\ddot{z}_{0\ell}(t) \qquad y_i(0)=\dot{y}_i(0)=0 \qquad \text{-------------(4)}$$

次に，(4)式を離散化し，線形加速度法を用いて求めた$y_i(k)$, $\dot{y}_i(k)$, $\ddot{y}_i(k)$をマトリックス表示すると，

$$\eta_i(k+1) = H_i\eta_i(k) + E_i\ddot{z}_0(k+1) \qquad t=k\cdot\Delta t \qquad \text{-------------(5)}$$

ただし，$\eta_i(k)=[\ y_i(k),\ \dot{y}_i(k),\ \ddot{y}_i(k)\ ]^T$，$H_i$, E_i：β_i, ω_i, $R_{i\ell}$, Δtから成る(3×3), $(3\times m)$のマトリックス

・(b)地震動の確率過程モデル

非定常確率過程$\ddot{z}_{0i}(k)$を時系列モデルの自己回帰モデル（ARモデル）で表現する。多次元非定常ARモデル[2]は次のように表現できる。

$$\ddot{z}_{0i}(k) = \sum_{p=1}^{i}\sum_{j=1}^{M} b_{ip}(j,k)\,\ddot{z}_{0p}(k-j) + \varepsilon_i(k) \qquad \text{-------------(6)}$$

ただし，$\ddot{z}_{0i}(k)$：$\ddot{z}_{0i}(k)$と$\ddot{z}_{0p}(k)$が互いに相関を有する非定常確率過程$E[\ddot{z}_{0i}(k)]=0$，$b_{ip}(j,k)$：$\ddot{z}_{0i}(k)$の周波数に関する非定常性を決定する確定関数値，$\varepsilon_i(k)$：$\ddot{z}_{0i}(k)$の振幅の大きさや非定常性を決定する非定常ホワイトノイズ　$E[\varepsilon_i(k)]=0$　$E[\varepsilon_i(k)\varepsilon_j(k)] = \begin{cases} \sigma_{ij}^2(k) & k=\ell \\ 0 & k\neq\ell \end{cases}$，$M$：ARモデルの次数

(6)式を状態空間表示すると，各時刻の加速度が非定常ホワイトノイズを入力とした漸化式から求めることができる。〔(7)式〕

$$\begin{bmatrix}\ddot{P}_{o1}(k)\\ \ddot{P}_{o2}(k)\\ \vdots\\ \ddot{P}_{om}(k)\end{bmatrix}_{(mM\times 1)} = \begin{bmatrix} B_{11}(k) & & & 0\\ B_{21}(k) & B_{22}(k) & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ B_{m1}(k) & B_{m2}(k) & \cdots & B_{mm}(k)\end{bmatrix}_{(mM\times mM)} \begin{bmatrix}\ddot{P}_{o1}(k-1)\\ \ddot{P}_{o2}(k-1)\\ \vdots\\ \ddot{P}_{om}(k-1)\end{bmatrix}_{(mM\times 1)} + V_{(mM\times m)} \begin{bmatrix}\varepsilon_1(k)\\ \varepsilon_2(k)\\ \vdots\\ \varepsilon_m(k)\end{bmatrix}_{(m\times 1)} \qquad \text{------------(7)}$$

ただし

$$\ddot{P}_{oi}(k) = \begin{bmatrix}\ddot{z}_{oi}(k)\\ \ddot{z}_{oi}(k-1)\\ \ddot{z}_{oi}(k-2)\\ \vdots\\ \ddot{z}_{oi}(k-M+1)\end{bmatrix}_{(M\times 1)} \quad B_{ii}(k) = \begin{bmatrix} b_{ii}(1,k), & b_{ii}(2,k), & \cdots & b_{ii}(M-1,k) & b_{ii}(M,k)\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\end{bmatrix}_{(M\times M)} \quad \underset{(i\neq j)}{B_{ij}(k)} = \begin{bmatrix} b_{ij}(1,k), & b_{ij}(2,k) & \cdots & b_{ij}(M-1,k) & b_{ij}(M,k)\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{bmatrix}_{(M\times M)} \quad V = \begin{bmatrix} \begin{matrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{matrix} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \begin{matrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{matrix}\end{bmatrix}_{(mM\times m)}$$

◦(C)応答共分散漸化式

(5)(7)式を１つにまとめて，次式のような状態空間方程式を作成する。

$$W_i(k+1) = T_i(k+2)\, W_i(k) + U\, \varepsilon(k+2) \qquad \text{------------(8)}$$

ただし，$W_i(k)$: 応答，入力を要素とする状態ベクトル，$T_i(k+2)_{[(3+mM)\times(3+mM)]}$: $W_i(k)$から$W_i(k+1)$への移行を規定する非定常遷移行列，$\varepsilon(k)$: 非定常ホワイトノイズベクトル

$W_i(k) = [\eta_i(k), \ddot{P}_{o1}(k+1), \ddot{P}_{o2}(k+1), \cdots \ddot{P}_{om}(k+1)]^T_{[(3+mM)\times 1]}$，$\varepsilon(k) = [\varepsilon_1(k), \varepsilon_2(k), \cdots \varepsilon_m(k)]^T_{(m\times 1)}$，$U = [0 \vdots V]^T_{[(3+mM)\times m]}$

(8)式を変形すると$W_i(k+1)$の共分散行列は容易に求めることができる

$$E[W_i(k+1) W_j^T(k+1)] = T_i(k+2) E[W_i(k) W_j^T(k)] T_j^T(k+2) + T_i(k+2) E[W_i(k) \varepsilon^T(k+2)] U^T + U E[\varepsilon(k+2) W_j^T(k)] T_j^T(k+2) + U E[\varepsilon(k+2) \varepsilon^T(k+2)] U^T \qquad (9)$$

ホワイトノイズの独立性を用いると

$$E[W_i(k)\, \varepsilon^T(k+2)] = E[\varepsilon(k+2)\, W_j^T(k)] = 0 \qquad \text{------------(10)}$$

よって，(9)式は(11)式のようになる。

$$\alpha_{ij}(k+1) = T_i(k+2)\, \alpha_{ij}(k)\, T_j^T(k+2) + U \sigma^2(k+2) U^T \qquad \text{------------(11)}$$

ただし，$\alpha_{ij}(k)$: 応答共分散行列$_{[(3+mM)\times(3+mM)]} = E[W_i(k) W_j^T(k)]$，$\sigma^2(k)$: 非定常ホワイトノイズの共分散$_{(m\times m)} = E[\varepsilon(k) \varepsilon^T(k)]$

(11)式に初期条件$\alpha_{ij}(0)$を与えることにより，各時刻の応答共分散行列が$\sigma^2(k)$を入力とする漸化式から求められる。なお，実際の応答は$\alpha_{ij}(k)$の要素を用いることにより算出できる。たとえば，絶対加速度応答は次式のようになる。

$$E[\ddot{x}(k)\, \ddot{x}^T(k)] = \Phi E[\ddot{y}(k)\, \ddot{y}^T(k)] \Phi^T + I\, E[\ddot{z}_0(k)\, \ddot{y}^T(k)] \Phi^T + \Phi E[\ddot{y}(k)\, \ddot{z}_0^T(k)] I^T + I\, E[\ddot{z}_0(k)\, \ddot{z}_0^T(k)] I^T \qquad (12)$$

また，入力が定常の場合には(6)式のＡＲモデルは時間に関して不変の係数$b_{ip}(j,k) = b_{ij}(j) = $(一定)を持ち，ホワイトノイズも一定の共分散値を持つため，(11)式は(13)式のようになる。

$$\alpha_{ij}(k+1) = T_i\, \alpha_{ij}(k)\, T_j^T + U \sigma^2 U^T \qquad \text{------------(13)}$$

(13)式において十分時間が経過した後は$\alpha_{ij}(k+1) = \alpha_{ij}(k) =$(一定)となるため$\alpha_{ij}$は代数的に求めることができる。

3. 結　　論

以上の漸化理論式を用いて例題を解き，シミュレーション解と比較したところ良好な結果を得た。この数値計算例は講演の際に示すことにする。この漸化理論式により複雑な構造物の応答を効率よく算出することが可能となる。

参考文献

1) A. DebChaudhury and D. A. Gasparini ; State Space Random Vibration Theory, A Report of N.S.F. ENG 77-19364, Case Western Reserve Univ., Oct., 1980　2) M. Hoshiya and T. Chiba ; Simulation Methods of Multi-Dimensional Nonstationary Stochastic Processes by Time Domain Models, Proc. of JSCE , No. 296, April, 1980