

大阪市立大学 正員 ○小林 治俊
 " " 園田 恵一郎
 兵庫果 " 寒川 美樹

1 まえがき 走行荷重による平板の動的挙動に関する研究は古くから行なわれているが、通常薄板理論によって行なわれており、動的挙動に及ぼすせん断変形および回転慣性の影響は考慮されていない。平板の静的曲げ解析において、板厚/スパン比が大きくなれば、せん断変形の影響を無視出来ない¹⁾とは良く知られた事実であり、動的解析においてより顕著にその影響が表われることが予想される。現在のところ、せん断変形と回転慣性を考慮した動的解析は、Shirakawa³⁾による Ambartsumyan 理論を用いた四辺単純支持板の解析が見られるだけである。本研究は、Mindlin 理論による動的解析法を示すと共に、相対2辺単純支持、残りの2辺が自由な平板上に線荷重が移動する場合の動的性状が、(1)板厚/スパン比の変化 (2)走行速度の変化 (3)板の内部減衰率によりどのように影響を受けるかを調べたものである。なお、今回の解析において回転慣性の影響は考慮していない。

2 動的応答解析法

図1に、取り扱う平板とその座標系を示す。走行荷重は、強度 q 幅 $2y_0$ の線荷重で、一定速度 v で x 軸上を移動するものとする。板の内部減衰を含めた支配方程式は、

$$\Delta_1(w, \psi_x, \psi_y) = 0 \quad ; \quad \Delta_2(w, \psi_x, \psi_y) = 0 \quad ;$$

$$\Delta_3(w, \psi_x, \psi_y) + 2\beta\rho h \dot{w} + \rho h \ddot{w} = g(x, y, t) \quad \text{--- (1)}$$

こゝで

$$\Delta_1 = \frac{D}{2} \left\{ (1-\nu) \nabla^2 \psi_x + (1+\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right\} + K G h \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi_x \right) ; \Delta_2 = \frac{D}{2} \left\{ (1-\nu) \nabla^2 \psi_y + (1+\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\} + K G h \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \psi_y \right) ; \Delta_3 = K G h (\nabla^2 w) \quad \text{--- (2)}$$

また $\nabla^2 = \partial^2 \psi_x / \partial x^2 + \partial^2 \psi_y / \partial y^2$; $\nabla^2 = \text{laplacian}$; $w = t$ 変位 ; $\psi_x, \psi_y = x, y$ 方向の回転角 ; $D = \text{板剛度}$; $G = \text{せん断弾性係数}$; $\nu = \text{ポアソン比}$; $\beta = \text{板減衰係数}$; $h = \text{板厚}$; $\rho = \text{板密度}$; $K = \text{せん断修正係数}$; $\dot{} = \partial/\partial t$; $\ddot{} = \partial^2/\partial t^2$; $t = \text{時間}$; $g = \text{荷重}$ 。せん断修正係数は動的解析では $\pi/12$ 、静的解析では $5/6$ と採られる事が多いが、本文では $K = 5/6$ と統一する。

式(1)の、後の数値計算を考慮して、慣性力項・減衰力項を無視した場合の解(準静的解と呼ぶ) w^s, ψ_x^s, ψ_y^s と、それらを考慮した場合の解(動的解) w^d, ψ_x^d, ψ_y^d とに分離させて解く。即ち、

$$w = w^s + w^d \quad ; \quad \psi_x = \psi_x^s + \psi_y^d \quad ; \quad \psi_y = \psi_y^s + \psi_y^d \quad \text{--- (3)}$$

とあれば、準静的解と動的解に対応する支配式は(1)式より(4)(5)となる。

準静的解

$$\Delta_1(w^s, \psi_x^s, \psi_y^s) = 0$$

$$\Delta_2(w^s, \psi_x^s, \psi_y^s) = 0$$

$$\Delta_3(w^s, \psi_x^s, \psi_y^s) = g(x, y, t) \quad \text{--- (4)}$$

動的解

$$\Delta_1(w^d, \psi_x^d, \psi_y^d) = 0$$

$$\Delta_2(w^d, \psi_x^d, \psi_y^d) = 0$$

$$\Delta_3(w^d, \psi_x^d, \psi_y^d) + 2\beta\rho h \dot{w}^d + \rho h \ddot{w}^d = -2\beta\rho h \dot{w}^s - \rho h \ddot{w}^s \quad \text{--- (5)}$$

式(4)は、通常の静的解析により解けるが、動的解を後で求める都合上、回転慣性を無視した Mindlin Plate の固有関数⁵⁾ $W_{mn}(x, y), \Psi_{x,mn}(x, y), \Psi_{y,mn}(x, y)$ により次式で表わす。

$$\{w^s, \psi_x^s, \psi_y^s\} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}(t) \{W_{mn}(x, y), \Psi_{x,mn}(x, y), \Psi_{y,mn}(x, y)\} \quad ; \quad g(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn}(t) W_{mn}(x, y) \quad \text{--- (6)}$$

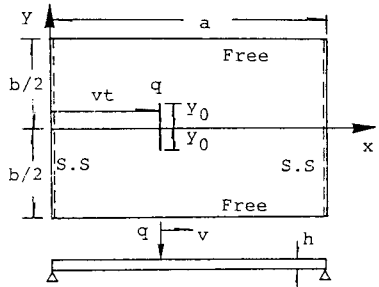


図1. 座標系

ここに, $W_{mn}(x,y) = Y_{mn}(y) \sin \alpha_m x$, $\Psi_{x,mn}(x,y) = Y_{mn}(y) \cos \alpha_m x$, $\Psi_{y,mn}(x,y) = Y_{mn}(y) \sin \alpha_m x$.

$$b_{mn}(t) = \int_0^1 b_{mn}^* \sin(\alpha_m v t) dt, \quad b_{mn}^* = \int_0^1 Y_{mn}(y) dy / \int_0^1 \int_0^1 Y_{mn}^2(y) \sin^2 \alpha_m x dx dy$$

式(6)を式(4)に代入すれば, 未定係数 $g_{mn}(t) = (g_0^2/D) (b_{mn}^* / \lambda_{mn}^4) \sin(\alpha_m v t)$, λ_{mn} = 固有値 —— (7), を得る。

次に動的解も固有函数に示し $\{W^d, \Psi_x^d, \Psi_y^d\} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} g_{mn}(t) \{W_{mn}(x,y), \Psi_{x,mn}(x,y), \Psi_{y,mn}(x,y)\}$ —— (8)

と表わし, 式(6)の準静的解と共に式(5)に代入すれば, 次の $g_{mn}(t)$ に関する微分方程式を得る。

$$\ddot{g}_{mn} + 2\beta \dot{g}_{mn} + p^2 g_{mn} = \frac{g_0^2}{D} \frac{b_{mn}^*}{\lambda_{mn}^4} \left[(\alpha_m v)^2 \sin(\alpha_m v t) - 2\beta \alpha_m v \cos(\alpha_m v t) \right] \quad (9)$$

式(9)は初期条件: $(W)_{t=0} = 0$, $(\dot{W})_{t=0} = 0$ かつ $(W^d)_{t=0} = -(W^s)_{t=0}$, $(\dot{W}^d)_{t=0} = -(\dot{W}^s)_{t=0}$ —— (10)

の元で容易に解くことが出来る。

3 数値計算結果

諸元は $q/b = 1$, $q_0/b = 1/20$, $v = 0.3$

と固定し, 板厚/スパン比 (h/a), スピードパラメータ $C = \pi v / \alpha_1 = v T_1 / 2a$

(α_1, T_1 = 基本固有振動数, 周期), 対数減衰率 $d = \beta / \alpha_1$ をパラメータとして数値計算を行った。準静的解式(6)は, 2次元等価な単級数解を別に誘導し, 収束を速めた。

図2は, 板中央の動たわみを薄板の静的最大たわみ W_0 で割った無次元動たわみ曲線である。薄板, 厚板とも $C < 2.0$ では1つのピークを持つが, C の増大と共に一つのピーク値を持つようになり, 右側が右方へ, 即ち荷重位置が右方へ近づくとつれたたわみ 最大値をとる。

図3は, 動最大たわみ W_{max} を薄板の静的最大たわみ W_0 で割った値を C の変化に対して描いたものである。 $C < 0.2$ では幾つかの極値を持つ複雑な曲線となるが, C の増大と共に一つのピークを持ち, それはおおよそ $C \sim 0.4 \sim 0.5$ において起る。せん断変形の影響は, 例えば $C = 0.15$ の場合, 静的たわみに対する増加率は $h/a = 0.1$ に対し約 22%, h/a に対し約 34% である。一方減衰効果は, せん断変形の影響を比べるとわかるようである。

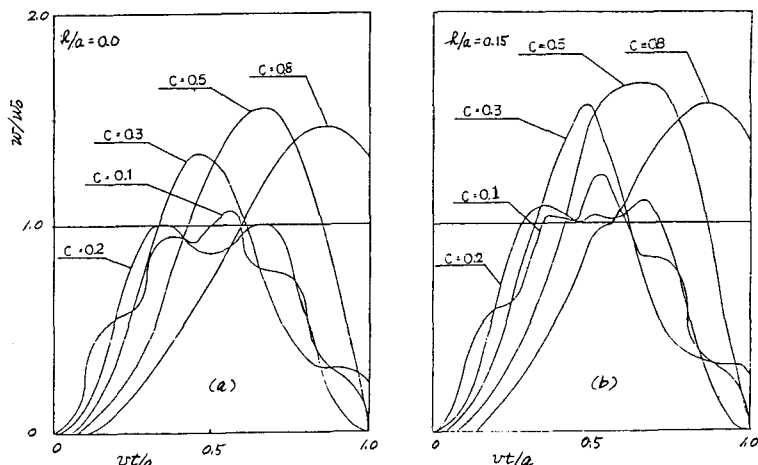


図2. 板中央の動たわみ曲線 (W_0 = 薄板の静的最大たわみ): (a) 薄板 (b) 厚板

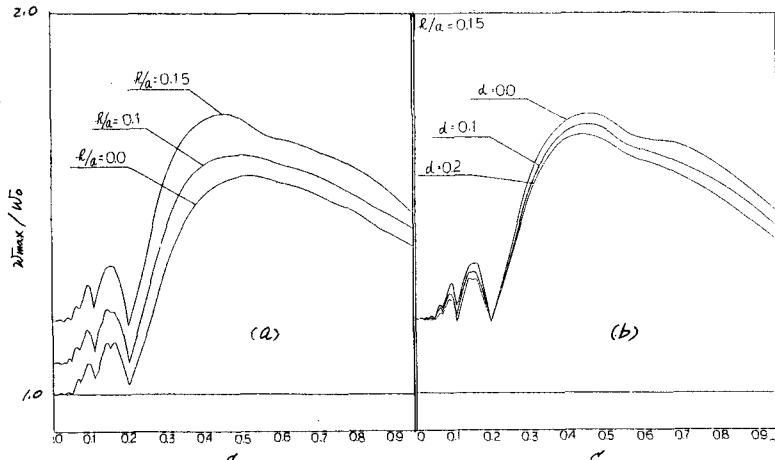


図3. 最大たわみの増大 VS. スピードパラメータ C (a) せん断変形の影響 (b) 減衰効果の影響

4 参考文献

- (1) 平井一男: 移動荷重をかける対称2次元単純支持板の自由振動変形特性, 土木学会論文集, 1971, 27, 112, 土木学会論文集 (2) Tjeng et al.: The Response of Beam and Slab Bridges to Moving Forces, J. Inst. Civ. Engrs. Vol. 28-2 (3) Shirakawa: Response of Rectangular Thick Plate to Moving Single Load, J. Eng. Arc. Vol. 50 (4) 山本一夫: 弾性平板 (増訂版) (5) 山本一夫: 弾性平板上の移動荷重による変形と応力, 土木学会論文集, 1972, 28, 112, 土木学会論文集