

信州大学 正員 石川 清 志
信州大学 正員 夏目 正太郎

1. まえがき 温度上昇が一様でない不均一温度分布は構造物の強度と寿命に大きく関与し、熱によって誘起される熱応力の特性を知ることは工学上重要なことであろう。本研究は、熱衝撃を受ける両縁が固定された無限帯板の動的曲げ問題の一解析法を示すもので、位置、時間に依存する熱源の形態に対する熱伝パロ、これに伴って誘起される曲げたわみの応答を明らかにする。解析法は、非連成熱弾性問題として、Fourier変換と変数分離の固有函数を導入して、熱および力学の境界条件および初期条件と熱伝導方程式および運動方程式を解く。

2. 理論解析 非定常温度場： $T(x, y, z, t)$ の影響を受ける均質等方性板の曲げに対する運動方程式は

$$D^2 \nabla^2 w + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -(1-\nu) \alpha_e \nabla^2 \Theta \quad (1)$$

と表わされる。 $w(x, y, t)$ は曲げたわみ、 D は曲げ剛性、 ρ は質量密度、 h は板厚、 ν はポアソン比、 α_e は熱膨張係数、 $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ 、 Θ は温度モーメントで

$$\Theta(x, y, t) = \frac{12}{h^3} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z T(x, y, z, t) dz$$

と表わされ、板厚が極めて薄い板の曲げ問題に対して熱伝導方程式は

$$\nabla^2 \Theta - \frac{12}{h^3} (1+\varepsilon) \Theta - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \Theta}{\partial t} = -m(x, y) H(t) \quad (2)$$

と表わされる。ここで

$$m(x, y) H(t) = \frac{12}{h^3} \varepsilon (\theta_u - \theta_l) + \frac{q}{\lambda}, \quad \kappa = \frac{\lambda}{c\rho},$$

$$q(x, y, t) = \frac{12}{h^3} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z W(x, y, z, t) dz, \quad \varepsilon = \frac{h\lambda_e}{2\lambda}$$

ただし、 λ は熱伝導率、 λ_e は熱伝達率、 c は比熱、 $W(x, y, z, t)$ は熱源で単位体積単位時間当りの熱発生量、 $\theta_u(x, y, t)$ および $\theta_l(x, y, t)$ は $z > \frac{h}{2}$ および $z < -\frac{h}{2}$ の周囲媒体温度である。いま、板は幅： $2a$ の両縁固定の無限帯板とする。すると(1)に対する境界条件および初期条件は

$$y = \pm a: w = \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad t = 0: w = \frac{\partial w}{\partial t} = 0. \quad (3)$$

(2) に対する境界条件および初期条件は

$$y = \pm a: \lambda \frac{\partial \Theta}{\partial y} \pm \lambda_e \Theta = 0, \quad t = 0: \Theta = 0 \quad (4)$$

とする。(4)の境界条件は $|y| > a$ の媒体温度をゼロとしたものである。無次元量： $\xi = x/a$ ($|\xi| < \infty$)、 $\eta = y/a$ ($|\eta| < 1$)、 $\tau = \kappa t/a^2$ ($0 < \tau$) を導入して、(2)、(4)を

$$\tilde{\Theta}(\eta, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Theta}(\xi, \eta, \tau) e^{i\xi\eta} d\xi, \quad \tilde{m}(\eta, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} m(\xi, \eta) e^{i\xi\eta} d\xi$$

にてFourier変換し、変数分離の固有函数を導入して解く。次の結果：

$$\tilde{\Theta}(\eta, \tau) = a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \{ B_n(\eta) \cos k_n \eta + B'_n(\eta) \sin k'_n \eta \} G_n(\tau) \quad (5)$$

が得られる(ブライムは η について奇函数、他は偶函数)。ここで

$$B_n(\eta) = \frac{\int_{-1}^1 \tilde{m}(\eta, \eta) \cos k_n \eta d\eta}{\int_{-1}^1 \cos^2 k_n \eta d\eta}, \quad B'_n(\eta) = \frac{\int_{-1}^1 \tilde{m}(\eta, \eta) \sin k'_n \eta d\eta}{\int_{-1}^1 \sin^2 k'_n \eta d\eta}$$

$$G_n(\tau) = e^{-\omega_n \tau} \int_0^\tau H(\tau') e^{\omega_n \tau'} d\tau', \quad \omega_n = k_n^2 + c^2 + \gamma^2$$

ただし、 k_n および k'_n は次の固有値方程式：

$$k_n \tan k_n - \zeta = 0, \quad k'_n \cot k'_n + \zeta = 0, \quad \zeta = a \frac{\lambda_e}{\lambda}$$

の根である。なお、 $c^2 = 12 \frac{a}{h^3} (1+\varepsilon)$ である。

同様に、(1)、(3)において

$$\tilde{w}(\eta, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{w}(\xi, \eta, \tau) e^{i\xi\eta} d\xi$$

を行い、(5)の結果を考慮して解く。次の結果：

$$\begin{aligned} \tilde{w}(\eta, \tau) = & \sum_{m=1}^{\infty} \{ \varphi_{ym}(\eta) [\cos \frac{p_m^2}{s} \tau, -\sin \frac{p_m^2}{s} \tau] \mathcal{D}_{ym} \\ & + \varphi'_{ym}(\eta) [\cos \frac{p_m^2}{s} \tau, -\sin \frac{p_m^2}{s} \tau] \mathcal{D}'_{ym} \} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \{ I_n(\eta) + I'_n(\eta) \} G_n(\tau) \end{aligned} \quad (6)$$

が得られる ($s^2 = \kappa^2 \frac{\rho h}{D}$)。ここで

$$\mathcal{D}_{ym} = \frac{s}{p_{ym}^2 \int_{-1}^1 \varphi_{ym}^2(\eta) d\eta} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{G_n(0)}{\dot{G}_n(0)} \right] \int_{-1}^1 \varphi_{ym}(\eta) I_n(\eta) d\eta,$$

$$\mathcal{D}'_{ym} = \frac{s}{p_{ym}^2 \int_{-1}^1 \varphi'_{ym}{}^2(\eta) d\eta} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{G_n(0)}{\dot{G}_n(0)} \right] \int_{-1}^1 \varphi'_{ym}(\eta) I_n(\eta) d\eta$$

$$I_n(\eta) = \frac{\cos k_n}{k_n^2 + \gamma^2} \cdot B_n(\gamma) \left\{ \frac{\cos k_n \eta}{\cos k_n} - \frac{(1+\zeta)sh\gamma + \gamma ch\gamma}{ch\gamma sh\gamma + \gamma} ch\gamma \eta + \frac{\gamma sh\gamma + \zeta ch\gamma}{ch\gamma sh\gamma + \gamma} \eta sh\gamma \eta \right\},$$

$$I'_n(\eta) = \frac{\sin k_n}{k_n^2 + \gamma^2} \cdot B'_n(\gamma) \left\{ \frac{\sin k_n \eta}{\sin k_n} - \frac{(1+\zeta)ch\gamma + \gamma sh\gamma}{ch\gamma sh\gamma - \gamma} sh\gamma \eta + \frac{\gamma ch\gamma + \zeta sh\gamma}{ch\gamma sh\gamma - \gamma} \eta ch\gamma \eta \right\},$$

$$\varphi_{ym}(\eta) = \frac{\cos \alpha_{ym} \eta}{\cos \alpha_{ym}} - \frac{ch \beta_{ym} \eta}{ch \beta_{ym}}, \quad \varphi'_{ym}(\eta) = \frac{\sin \alpha_{ym} \eta}{\sin \alpha_{ym}} - \frac{sh \beta_{ym} \eta}{sh \beta_{ym}}.$$

$\varphi_{ym}(\eta)$ および $\varphi'_{ym}(\eta)$ は固有函数とその導関数の固有値方程式:

$$\alpha_{ym} \tan \alpha_{ym} + \beta_{ym} \tanh \beta_{ym} = 0, \quad \alpha_{ym} \cot \alpha_{ym} - \beta_{ym} \coth \beta_{ym} = 0 \quad (7)$$

の根: p_{ym} を採用する。ただし, α_{ym} および β_{ym} は p_{ym}, γ の関数次の関係: $\alpha_{ym}^2 = p_{ym}^2 - \gamma^2$, $\beta_{ym}^2 = p_{ym}^2 + \gamma^2$ をとる。(5) および (6) を Fourier 逆変換:

$$\Phi(\xi, \eta, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi}(\gamma, \eta, \tau) e^{-i\gamma \xi} d\gamma, \quad \omega(\xi, \eta, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\omega}(\gamma, \eta, \tau) e^{-i\gamma \xi} d\gamma$$

すれば (4) および (1) は得られる。

3. 数値計算例 熱源は位置に対し部分分布(図-1):

$$m(\xi, \eta) = \begin{cases} m_0 & (|\xi| < \xi_0, |\eta| < \eta_0) \\ 0 & (|\xi| > \xi_0, |\eta| > \eta_0) \end{cases}$$

時間に依存して一定なステップ形: $H(\tau) = 1$ を表わされる場合について数値計算を行った。図-2は積分変数: γ に対する固有値方程式(7)の(1式)の根: p_m の特性を表わしたもので, $\gamma = 0$ のとき p_m が両端固定梁の自由振動の固有値に合致し, p_{0m} を初期値として指数関数的な形態を表わす。図-3は熱源の形態に対するたわみ応答を表わしたものである。中央点のたわみ $w(0, 0, \tau)$ は,

$w_p(0, 0, \tau)$ (準静的

曲げたわみ: (6) の(1式)を中心にして振動し, 高次の固有周期の影響によっていくらかみだれるもののその振動周期は1次の固有周期:

$$\frac{2S\pi}{p_{01}^2} = 0.00112$$

が支配的である。また,

た, 1周期の極値

が最大振幅を表わし, 時間経過に伴って減衰するが, 約 $\tau = 0.0042$ で再び増振幅し, 以後減衰する形態をくり返す。 $w_p(0, 0, \tau)$ は約 0.00002 以下に定常状態に移行するが, この形態は ω_m に依存する。なお, Fourier 逆変換の積分は 0 から ∞ の積分に置き換え積分上限値を $\gamma = 40$ として Simpson 数値積分を用いて行った。また, m および n の級数は共に 20 次まで採用した。

Nowacki, W., *Thermoelasticity*, Pergamon Press, Oxford, 1962, p. 435-504.

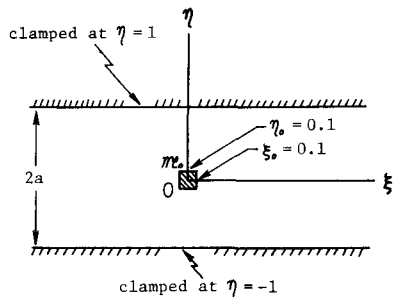


図-1. 両縁固定の無限帯板

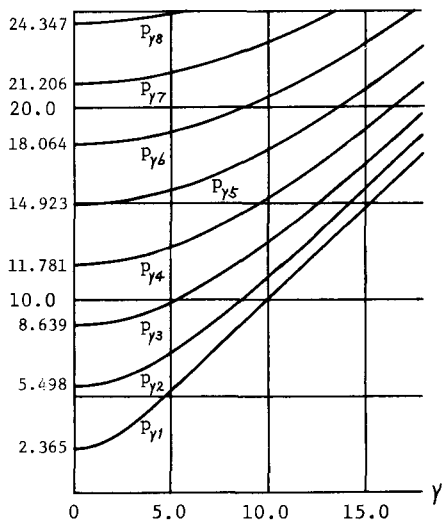


図-2. γ に対する p_m の変動

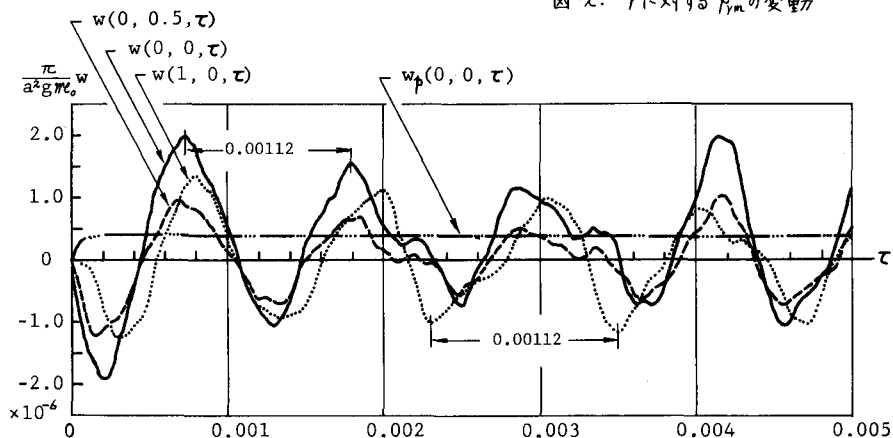


図-3. たわみ応答 ($g = (1+\nu)\alpha_0 a^2$)