

○東海大学海洋学部 正員 川上 哲太郎

東海大学海洋学部 正員 北原 道弘

1. 諸言

本研究は、有限水深域における任意形状の弾性構造物と海洋波動との動的相互作用問題を積分方程式により定式化し、解析しようとするものである。本研究で考える、弾性体—流体系に関する相互作用問題の解析は、現在、弾性体を薄板と仮定した解析や、ダムの地震時動水圧問題の解析が行なわれているにすぎない。本研究はまず、構造物を任意形状の線形弾性体と仮定し、この弾性構造物及び流体に関する境界値問題を積分方程式に各々変換し、次に、得られた積分方程式を弾性体—流体共通の境界上での連続条件を与えることにより接続し、弾性体—流体系に対する積分方程式系を定式化し、解析を行なうものである。本解析法の利点は、構造物を任意形状の弾性体として構造物自身の变形、応力解析が行なえること、構造物の弾性変形を考慮した波圧の算定が行なえることなどであり、海洋構造物の応力集中問題や破壊問題等を含め、構造物の变形、応力機構を説明する際の有用な手法であると言える。

2. 基礎式及び境界条件

領域をFig-1のように定義する。即ち、(I)及び(III)は、無限遠を含む一定水深域、(II)は構造物又は水深の変化による波の散乱が顕著な領域、(IV)は構造物である。

(1) 弾性体

領域(IV)の構造物を等方、均質、線形な弾性体と仮定すれば、弾性体の基礎式は次のようになる。

$$\mu \Delta \bar{\mathbf{u}} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = \rho \ddot{\bar{\mathbf{u}}} \quad (1) \quad (\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t): \text{変位ベクトル}, \lambda, \mu: \text{Lamé 定数}, \rho: \text{密度})$$

入射波の角振動数を ω とし、以下、 $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \text{Re}\{\mathbf{u}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}\}$ なる定常状態を考えることにする。この定常状態に対する基礎式は次のようになる。(但し、記号 Re 、時間因子 $e^{-i\omega t}$ は以下略)

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \rho \omega^2 \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (2)$$

弾性体の表面(S_1)上の境界条件は応力ベクトル $\mathbf{t}$ について次のようになる。

$$\mathbf{t} = \bar{\mathbf{T}}\mathbf{u} = \lambda \mathbf{n}(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \mathbf{n} \cdot (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) = \mathbf{g}_1 \text{ (on } S_1) \quad (3) \quad (\text{但し } \mathbf{n} \text{ は外向き単位法線ベクトル})$$

(2) 流体

領域(I)(II)(III)の流体については、非圧縮性完全流体であり無渦運動と仮定すると、速度ベクトル $\mathbf{V}$ 及び基礎式は速度ポテンシャル Φ を用いて次のように表わされる。(但し、 $\bar{\Phi}(\mathbf{x}, t) = \text{Re}\{\Phi(\mathbf{x})e^{-i\omega t}\}$ なる定常状態を考える。)

$$\mathbf{V} = \nabla \Phi \quad (4) \quad \Delta \Phi = 0 \quad (5)$$

流体の自由表面(S_3)及び海底面(S_5)上の境界条件は次のようになる。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = \frac{\omega^2}{g} \Phi \quad (\text{on } S_3) \quad (6) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad (\text{on } S_5) \quad (7)$$

領域(I)(III)における速度ポテンシャル Φ^I, Φ^{III} は次のように表わされる。

$$\begin{aligned} \Phi^I &= \Phi^I + \Phi^R + \Phi^{SI} \\ &= -(\alpha^I e^{\frac{ig}{\omega} \cos k(x_1 + h^{(1)})} + \alpha^R e^{-\frac{ig}{\omega} \cos k(x_1 + h^{(1)})}) \frac{\cosh k(x_2 + h^{(1)})}{\cosh k h^{(1)}} \\ &\quad - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_m^I}{\alpha_m^I} \frac{ig}{\omega} \frac{\cos k_m(x_2 + h^{(1)})}{\cos k_m h^{(1)}} \cdot e^{k_m(x_1 + h^{(1)})} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \Phi^{III} &= \Phi^T + \Phi^{SI} \\ &= -(\alpha^T \frac{ig}{\omega} \frac{\cosh k(x_2 + h^{(2)})}{\cosh k h^{(2)}} \cdot e^{ik(x_1 - h^{(2)})} \\ &\quad - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_m^T}{\alpha_m^T} \frac{ig}{\omega} \frac{\cos k_m(x_2 + h^{(2)})}{\cos k_m h^{(2)}} \cdot e^{-k_m(x_1 - h^{(2)})} \end{aligned} \quad (9)$$

但し、 ω 及び k, k_m は次式を満足しなければならない。

$$\omega^2 = g k \tanh kh = -g k_m \tanh k_m h \quad (10)$$

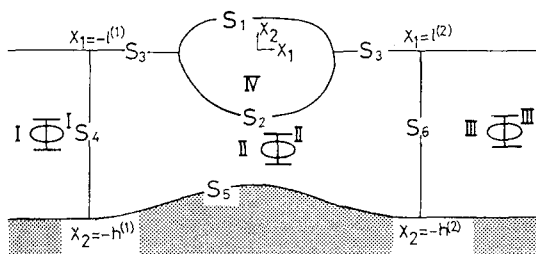


Fig.-1 Definition of region.

また、仮想境界(S4, S6)上で各領域における速度ポテンシャルは、次の連続条件を満足する。

$$\Phi^I = \Phi^{II}, \quad \frac{\partial \Phi^I}{\partial n} = \frac{\partial \Phi^{II}}{\partial n} \quad (\text{on } S_4) \quad (11) \quad \Phi^{II} = \Phi^{III}, \quad \frac{\partial \Phi^{II}}{\partial n} = \frac{\partial \Phi^{III}}{\partial n} \quad (\text{on } S_6) \quad (12)$$

なお、領域(I, III)において散乱波は無限遠で放射条件を満足しなければならない。

(3) 弾性体と流体の境界面における連続条件

弾性体と流体の境界面(S2)においては、力学的及び運動学的(応力及び変位(速度))連続条件が成立しなければならない。即ち、 $\mathbf{t} = -n P = -n i \bar{\rho} \omega \Phi^{II} \quad (13) \quad -i \omega \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = (\nabla \Phi^{II}) \cdot \mathbf{n} \quad (14)$

ここで、Pは流体圧、 $\bar{\rho}$ は流体密度である。

3. 積分方程式による定式化

弾性体及び流体の境界上における変位及び速度ポテンシャルの積分表現は次のようになる。

$$(\text{弾性体}) \quad C_d^+ \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \int_S \{ \mathbf{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega) \cdot (\bar{\mathbf{T}}^T \mathbf{u}(\mathbf{y})) - \{ \bar{\mathbf{T}}^T \mathbf{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega) \} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{y}) \} dS_y = (\mathbf{S} \mathbf{t})(\mathbf{x}) - (\mathbf{D} \mathbf{u})(\mathbf{x}) \quad (15)$$

$$(\text{流体}) \quad C_d^- \Phi(\mathbf{x}) = \int_S \{ G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial \Phi(\mathbf{y})}{\partial n} - \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n_y} \Phi(\mathbf{y}) \} dS_y = (G \Phi)(\mathbf{x}) - (H \Phi)(\mathbf{x}) \quad (16) \quad (\text{但し } \Phi = \Phi^{II})$$

基本解 $\mathbf{U}$, G は次のようである。

$$\mathbf{U} = \frac{1}{4\pi} \{ \mathbf{H}^{(0)}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{1} + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \{ \mathbf{H}^{(0)}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{H}^{(0)}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \} \}, \quad G = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{r} \quad (r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)$$

また、 $C_d^+ \mathbf{u}$, $C_d^- \Phi$ は二重層ポテンシャルの外部極限としての自由項であり、境界がなめらかであれば、 $C_d^+ = (1/2) \mathbf{1}$, $C_d^- = 1/2$ である。さらに、(15), (16)式の積分表現を離散化し、 $\mathbf{u}$ 及び Φ についてまとめ、マトリックス表現すれば次のようになる。

$$[S_1 \ S_2] \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_2 \end{Bmatrix} = [\bar{D}_1 \ \bar{D}_2] \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{Bmatrix} \quad (17) \quad [G_2 \ G_3 \ G_4 \ G_5 \ G_6] \begin{Bmatrix} \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \\ \Phi_6 \end{Bmatrix} = [\bar{H}_2 \ \bar{H}_3 \ \bar{H}_4 \ \bar{H}_5 \ \bar{H}_6] \begin{Bmatrix} \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \\ \Phi_6 \end{Bmatrix} \quad (18)$$

(ここで添字1~6は各境界 $S_1 \sim S_6$ 上の値に対応している。)

(17), (18)式に境界条件(3), (6), (7)式、連続条件(11), (12), (13), (14)式を導入しまとめれば、問題は次の連立一次方程式を解くことに帰着される。

$$\begin{bmatrix} -\bar{D}_1 & -\bar{D}_2 & S_2 N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 N_2 & -\bar{H}_2 & \omega^2 G_3 & -\bar{H}_3 & G_4 N_3 & -\bar{H}_4 N_4 & G_5 N_5 & -\bar{H}_5 N_6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \\ \Phi_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -S_1 & 0 \\ 0 & -G_4 N_7 + \bar{H}_4 N_8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \end{Bmatrix} \quad (19)$$

4. 数値計算

Fig. 2に示すようなモデルについて、構造物を固定、剛体とした計算例を示す。入射波振幅(1)に対する反射波(α)及び通過波(β)の振幅比、 α/α_i 及び β/α_i (反射係数、透過係数)について(8), (9)式中の散乱波に関する級数項を2項及び4項で近似して計算した結果をBlack & Mei⁽³⁾の研究結果と比較したものがFig. 3である。本手法による結果は、Black & Meiの結果とよく一致していることが判る。又、級数項は2項で近似しても十分な計算結果が得られるものと考えられる。なお、数値計算についての詳細は当日会場にて発表する。

参考文献

1) Wen, Y.-K. and Shinagawa, M., Analysis of Floating Plate Under Ocean Waves, Proc. A.S.C.E., WW2, PP 177-190, 1972. 2) 小林昭一他, 積分方程式を用いた地震時動水圧の解析に関する研究, 土木学会関西支部誌, 1979. 3) Black, J.L. and Mei, C.C., Scattering and Radiation of Water Waves, Report No. 121, Dept. of Civil Engineering, Mass. Inst. Technol., 1970.

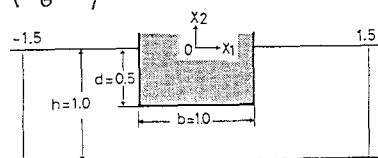


Fig. 2 Model of numerical analysis.

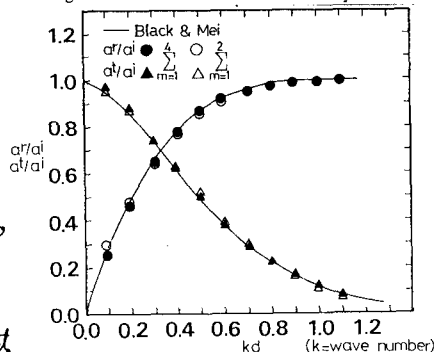


Fig. 3 Reflection and transmission coefficients.