

岡山大学工学部
飛鳥建設株式会社

正員 ○谷口健男
生田均作

1. まえがき

FEM, FDMによる数値解析では最終的には連立一次方程式を解く問題に帰着されることが多く、その解法として間接法(反復法)を用いる場合、解が収束するまでの演算時間が問題となる。本研究では間接法の基本であるガウス・ザイデル法(GS法)について、演算時間と直接関係のある収束反復回数を予測するとともに、解の収束を早めるSOR法の最適加速パラメータの推定を目的とする。

2. GS法およびSOR法の特徴

今、解かなければならない連立一次方程式を $Ax=b$ とし、係数行列 A を左下半分、対角、右上半に分け、それぞれ $-E$, D , $-F$ で表すと、GS法の基本式は $x^{(k+1)} = (D-E)^{-1}Fx^{(k)} + (D-E)^{-1}b$ となる。(上添字は反復回数を示す。) ここで $C = (D-E)^{-1}F$ をGS行列と呼ぶ。GS法が収束するための条件は C の $\|C\| < 1$ であり、また解の精度を一定にするのに必要な反復回数を ΔIT とすると、 $\Delta IT = -1/\log \|C\| \dots (1)$ の関係がある。ここで行列 C のスペクトル半径 $\rho(C)$ を考え、また C の最大固有値を λ_{max} とすると、 $\|C\| \geq \rho(C) = \lambda_{max} \dots (2)$ であり、(1), (2)より次のことが云える。 $\Delta IT \geq -1/\log \lambda_{max} \dots (3)$ (3)式より、 ΔIT はGS行列 C の最大固有値 λ_{max} の値に依存し、 λ_{max} を求めることにより ΔIT が推定できる。また $\|C\|$ が一定である以上、 ΔIT は一定であると考えられ、実際に数値実験を行った結果では ΔIT は演算当初 初期値の与え方 および収束判定条件によって収束が不均一となるが、解の精度を上げることによって一定の値をとるようになる。次に、SOR法の加速パラメータ ω の値はGS法のGS行列 C の最大固有値 λ_{max} を用いて $\omega = 2/(1 + \sqrt{1 - \lambda_{max}}) \dots (4)$ で与えられることにより、 ΔIT または λ_{max} を予測できれば ω の値は推定できることになる。

3. 反復回数の予測

数値実験モデルも矩形領域に限定する。縦を $(NG1-1)$ 、横を $(NG2-1)$ 等分し、節点数 N は $N = NG1 * NG2$ とする。反復回数に影響を及ぼす要因としては文献1によれば、節点数、メッシュパターン、境界条件の違いが考えられる。従ってメッシュパターンは一般によく用いられる MESH 1, MESH 2, MESH 3 の3ケース(図-1)を扱い、境界条件は 四辺固定、三辺固定、隣辺固定、一辺固定の5ケースを扱う。また(3)式を実験的に裏付けるために ΔIT と λ_{max} を数値実験で求め ΔIT と $-1/\log \lambda_{max}$ を比較したところ(3)式は等号に置換できることがわかった。即ち $\Delta IT = -1/\log \lambda_{max} \dots (5)$ 。(5)式より ΔIT の予測は λ_{max} の予測に置き換えられる。ここで λ_{max} の予測について考え、MESH 1 のような格子状分割メッシュでは 四辺固定の境界条件においてヤングの理論より λ_{max} の値が解析的に $\lambda_{max} = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{m_1} + \cos \frac{\pi}{m_2} \right)^2 \dots (6)$ と求まる²⁾。ここで m_1, m_2 は縦、横方向の分割数である。図-2に示すようなモデルでは $\lambda_{max} = 0.80094$ となり、この値は実験値と一致した。ただし(6)式は四辺固定の格子状メッシュにしか適用できない。一方、文献1では、固定されている一辺をある割合で伸ばし固定させることにより、誤差は常に1%以内、 ΔIT の予測に成功しており、ここでもこの方法を用いる。すなわち、境界条件の1つを伸ばす、全く四辺固定の系に一度置換した上で、(6)式を適用する。図-3に四辺固定への置換方法を境界条件別に示す。他の MESH 2, 3 についても同様に各メッシュ、各境界条件により m_1, m_2 を導出し、(6)式によって λ_{max} を予測する。予測された λ_{max} を(5)式により ΔIT に変換して予測 ΔIT を GI とし、MESH 1, MESH 2,

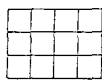
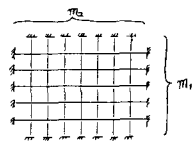


図-1 メッシュパターン



四辺固定(MESH 1)

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{l} NG1=5, \quad NG2=7 \\ m_1=6, \quad m_2=8 \end{array} \right) \\ & \lambda_{max} = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{m_1} + \cos \frac{\pi}{m_2} \right)^2 \\ & = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{8} \right)^2 \\ & = 0.800940 \end{aligned}$$

図-2 解析例

MESH 3 の各境界における $\lambda_{\max}$, ΔIT の予測方法を表-1 に示す。また表-1 の予測式を用いて求めらる GIT と実験による ΔIT との比較を表-2 に示す。表-2 に示すように、 ΔIT はかなり良い精度で予測できることがわかる。

4. 加速パラメータの推定

ΔIT および $\lambda_{\max}$ がかなりの精度で予測できることにより、SOR 法の加速パラメータ ω の値も (4) 式を用いることにより容易に導き出されることが明らかである。また (4) 式は GIT を用いると

$\omega = 2 / (1 + \sqrt{1 - (1/GIT)^{1/4IT}}) \dots (4)$ でも表わすことができる。(4) 式によって与えらる予測 ω の値を SOR 法を用いた結果と比較したのが図-4 である。図中 TOTAL IT は解の精度 10^{-7} まであげるのに要した反復回数である。この結果より、予測 ω の値は ω_{opt} (最適値) よりわずかに小さい値をとっているが、GS 法に比べて反復回数が大幅に減少していることにより、上記手法は ω の推定に十分有効であるといえる。また、 ω の値が大きくなっても反復回数の増加は急速ではないことを考慮すれば、上記計算法で与えらる ω より若干大きい値を用いる方がよいといえる。

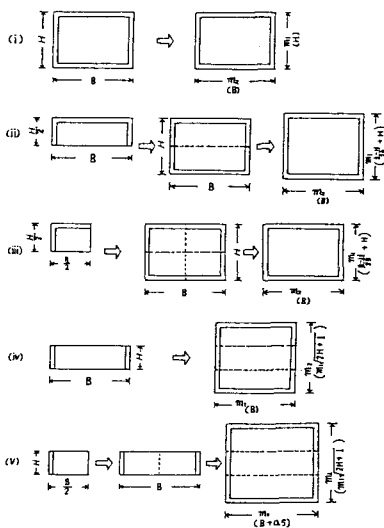


図-3 四周辺固定への置き換え(MESH1)

5. あとがき

以上のように、四周辺固定矩形領域の5点差分メッシュに有効なヤングの理論を拡張・応用することにより、有限要素分割した矩形領域に対する反復回数および加速パラメータの推定式を導き出した。今後の課題としては、任意形状領域への本手法の拡張が望まれる。

表-2 反復回数 ΔIT の予測

N	NG1	NG2	境界条件 (MESH)	H	B	m_1	m_2	$\lambda_{\max}$	予測 ΔIT	ΔIT					
										10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
(1)	1000	20	一辺固定 (MESH1)	19	100	100.5	6276	0.9995	4594.7	3755	4594	4593	4594	4594	4593
(2)	600	10	二辺固定 (MESH2)	9	61	61.0	265.9	0.9986	1649.2	1366	1649	1649	1649	1650	1649
(3)	600	10	三辺固定 (MESH3)	9	61	61.0	213.2	0.9986	1604.6	1058	1601	1601	1601	1601	1601
(4)	600	10	四辺固定 (MESH4)	9	61	61.0	84.9	0.9980	1144.5	619	1147	1147	1147	1147	1147
(5)	1200	30	一辺固定 (MESH1)	60	80	60.1	80.0	0.9979	1077.5	974	1076	1076	1076	1076	1076
(6)	1200	30	二辺固定 (MESH2)	60	80	63.1	80.0	0.9980	1145.5	1164	1163	1163	1163	1163	1162
(7)	1200	30	三辺固定 (MESH3)	60	80	49.3	65.6	0.9968	724.4	440	722	720	721	720	720
(8)	1200	30	四辺固定 (MESH4)	31	41	31.0	41.0	0.9920	264.9	260	286	285	284	285	285
(9)	1200	30	四辺固定 (MESH3)	31	41	27.6	36.5	0.9898	225.6	166	226	225	225	225	225
(10)	1200	30	四辺固定 (MESH3)	31	41	25.4	33.6	0.9880	191.5	116	191	190	190	190	191

表-1 反復回数の予測式

境界条件	MESH1	MESH2	MESH3
四周辺固定 (NG1 ≤ NG2)	$H = NG1 + 1$ $B = NG2 + 1$ $m_1 = B$ $m_2 = B$	$m_1' = 0.89 m_1$ $m_2' = 0.89 m_1$ $m_3' = 0.82 m_1$ $m_4' = 0.82 m_1$	$m_1' = 0.82 m_1$ $m_2' = 0.82 m_1$ $m_3' = 0.82 m_1$ $m_4' = 0.82 m_1$
三辺固定	$H = 2NG1$ $B = NG2 + 1$ $m_1 = \frac{B-H}{2B} + H$ $m_2 = B$	$m_1' = 0.905 m_1$ $m_2' = 0.905 m_2$ $m_3' = 0.82 m_1$ $m_4' = 0.82 m_2$	$m_1' = 0.82 m_1$ $m_2' = 0.82 m_2$ $m_3' = 0.82 m_1$ $m_4' = 0.82 m_2$
二辺固定 (NG1 ≤ NG2)	$H = 2NG1$ $B = 2NG2$ $m_1 = \frac{B-H}{2B} + H$ $m_2 = B$	(A) $m_1' = 0.835 m_1$ $m_2' = 0.835 m_2$ (B) $m_1' = m_1 + \frac{(2H-B)H}{10B}$ $m_2' = B$	$m_1' = 0.82 m_1$ $m_2' = 0.82 m_2$ $m_3' = 0.82 m_1$ $m_4' = 0.82 m_2$
一辺固定	$H = NG1 - 1$ $B = 2NG2$ $m_1 = B + 0.5$ $m_2 = m_1 / 2H + 1$	$m_1' = B + 0.5$ $m_2' = m_1 / 2H + 1$ $m_3' = m_1 / 2H + 1$ $m_4' = m_1 / 2H + 1$	$m_1' = B + 0.5$ $m_2' = m_1 / 2H + 1$ $m_3' = m_1 / 2H + 1$ $m_4' = m_1 / 2H + 1$
最大固有値 $\lambda_{\max}$	$\lambda_{\max} = \frac{1}{2}(\cos \frac{\pi}{m_1} + \cos \frac{\pi}{m_2})$	$\lambda_{\max} = \frac{1}{2}(\cos \frac{\pi}{m_1} + \cos \frac{\pi}{m_2})$	$\lambda_{\max} = \frac{1}{2}(\cos \frac{\pi}{m_1} + \cos \frac{\pi}{m_2})$
反復回数 (GIT)	$GIT = -\frac{1}{\log \lambda_{\max}}$	$GIT = -\frac{1}{\log \lambda_{\max}}$	$GIT = -\frac{1}{\log \lambda_{\max}}$

注) 隣辺固定の MESH2 では (A) と (B) とを比較して、(B) を用いる。

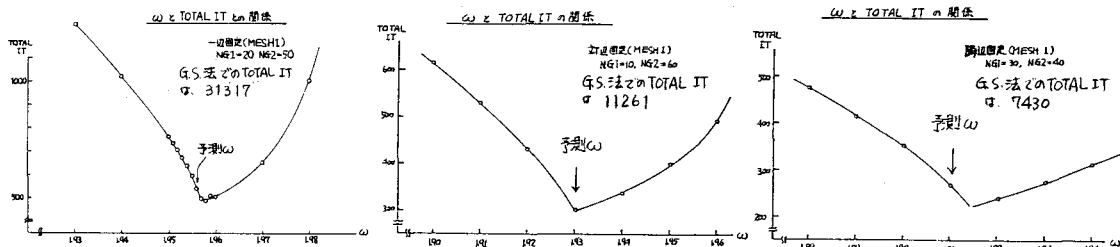


図-4. ω_{opt} と本手法による予測 ω の比較

参考文献: 1). 伊藤・谷口・養井, 土木学会年報 (S57)

2). D.M. Young, Iterative Solution of Large Linear Systems, Academic Press, 1971