

名古屋大学 ○学生会員 京谷孝史 正会員 尾原祐三
正会員 市川康明 正会員 川本勝万

1. はじめに 弾性ポテンシャル関数の存在を仮定し流れ則を用いて弾塑性構成則を定式化する場合には、Drucker の安定条件は必然的に関連流れ則を要求する。しかし関連流れ則による弾塑性構成則は土や岩石などに適用した場合に、ダイレイタンス係数を過大に評価するという欠点を持つ。この欠点を補うために土や岩石に対しては、降伏関数とは異なる弾性ポテンシャル関数を導入する非関連流れ則が適用されてきた。ところがこの非関連流れ則を用いる場合は弾性ポテンシャル関数を決定する際に実験および理論的にかなりの困難を伴うため、あえて関連流れ則を用いることも多かった。

Rudnicki と Rice¹⁾ は Von-Mises 則と関連流れ則から得られる構成式に多軸状態に拡張した摩擦則を導入して、材料内部の力学的弱面におけるすべりを考慮した弾塑性構成式を提案しているが、その中で彼らは弾性ポテンシャル関数とを直接求めることを行わず、弾性ひずみ増分のせん断成分と体積成分の比とダイレイタンス係数 β として導入して構成式を導いている。彼らの方法は β を直接定めることの導関数を定めることを意味し、非関連流れ則を適用する際の β の決定という困難な作業を回避している。

本報告では Rudnicki と Rice がダイレイタンス係数 β を導入して定式化した構成式が、制約条件を持つポテンシャル ϕ と等ひずみ硬化を仮定した Drucker-Prager 型の降伏関数を用いた非関連流れ則から導かれることを示し、ダイレイタンス係数 β を導入する方法が非関連流れ則を導入する方法に含まれることを示す。また大谷石の三軸試験結果から実際に β の関数形を定め非関連流れ則による弾塑性構成式を定式化した。

2. Rudnicki と Rice の構成式 Rudnicki と Rice¹⁾ は Von-Mises 則と関連流れ則を適用して得られる構成式、

$$de_{ij}^p = \frac{1}{R} \frac{S_{ij}}{2\sqrt{J_2}} \left(\frac{S_{ee}}{2\sqrt{J_2}} dS_{ee} \right), \quad S_{ij}; \text{偏差応力}, \quad e_{ij}^p; \text{偏差弾性ひずみ}, \quad R; \text{硬化パラメータ}, \quad \sqrt{J_2} = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij} \quad (1)$$

の右辺の () の中を、 $\bar{\sigma} = \sqrt{J_2}$, $\bar{\sigma} = -\frac{1}{3} \sigma_{kk}$ において多軸状態に拡張した摩擦則、

$$d\bar{\sigma} - \mu d\bar{\sigma} = \frac{S_{ee}}{2\sqrt{J_2}} + \frac{\mu}{3} d\sigma_{kk} \quad , \quad \mu; \text{内部摩擦係数} \quad (2)$$

を置き換えて、内部摩擦を考慮したせん断成分に対する構成式として次式を提案した。

$$de_{ij}^p = \frac{S_{ij}}{2\sqrt{J_2}} \left(\frac{S_{ee}}{2\sqrt{J_2}} dS_{ee} + \frac{\mu}{3} d\sigma_{kk} \right) \quad (3)$$

弾性せん断仕事増分 $dW_s^p = S_{ij} de_{ij}^p = \bar{\sigma} d\bar{\sigma}$ において、 $\bar{\sigma} = \sqrt{J_2}$ および (3) 式を代入すると $d\bar{\sigma}$ が次式で与えられる。

$$d\bar{\sigma} = (2 de_{ij}^p de_{ij}^p)^{1/2} = \frac{1}{R} \left(\frac{S_{ee}}{2\sqrt{J_2}} dS_{ee} + \frac{\mu}{3} d\sigma_{kk} \right) \quad (4)$$

この $d\bar{\sigma}$ と de_{kk}^p の比とダイレイタンス係数 β として次式で定義した。

$$\beta = de_{kk}^p / d\bar{\sigma} = de_{kk}^p / (2 de_{ij}^p de_{ij}^p)^{1/2} \quad (5)$$

この β を用いると (3) 式から体積成分に関する構成式が次式で与えられる。

$$de_{kk}^p = \frac{\beta}{R} \left(\frac{S_{ee}}{2\sqrt{J_2}} dS_{ee} + \frac{\mu}{3} d\sigma_{kk} \right) \quad (6)$$

彼らは (3), (6) を構成式として提案したが、これらがいかなる降伏関数に対して Prager の適応条件式を満足しているのかということには言及しておらず検討が必要である。

3. ダイレイタンスー係数を用いた非関連流れ則による弾塑性構成式

RudnikとRiceの提案した構成式(3),

(6)式は、等方圧み硬化を仮定したDrucker-Prager型の降伏関数 $f=0$ と、制約条件を持つ塑性ポテンシャル関数 ϕ を用いた非関連流れ則によって導くことができる。

降伏関数 $f=0$ を次式で与える。

$$f = \alpha \sigma_{FE} + \sqrt{J_2} - K(\epsilon_{ij}^p) = 0 \quad (7)$$

塑性ポテンシャル ϕ は次のように与えられるとする：ダイレイタンスー係数 β を導入し $d\epsilon_{ij}^p = \beta (2de_{ij}^p de_{ij}^p)^{1/2}$ とし、

$$de_{ij}^p = \lambda \frac{\partial g}{\partial S_{ij}}, \quad d\epsilon_{FE}^p = \sqrt{2} \lambda \beta \left\| \frac{\partial g}{\partial S_{FE}} \right\|, \quad \left\| \frac{\partial g}{\partial S_{FE}} \right\| = \left(\frac{\partial g}{\partial S_{ij}} \frac{\partial g}{\partial S_{ij}} \right)^{1/2} \quad (8)$$

したがって流れ則は次式となる。(9)式であるから非関連である。

$$d\epsilon_{ij}^p = \lambda \left\| \frac{\partial g}{\partial S_{FE}} \right\| (m_{ij} + \frac{\sqrt{2}}{3} \beta \delta_{ij}), \quad m_{ij} = \frac{\partial g}{\partial S_{ij}} / \left\| \frac{\partial g}{\partial S_{FE}} \right\| \quad (9)$$

(7)式にPragerの応進条件 $df=0$ を適用し、(9)式を代入すると λ が次のように定まる。

$$\lambda = \frac{\alpha d\sigma_{FE} + \frac{S_{FE}}{2\sqrt{J_2}} dS_{FE}}{\left\| \frac{\partial g}{\partial S_{FE}} \right\| (m_{ij} + \frac{\sqrt{2}}{3} \beta \delta_{ij}) \frac{\partial K}{\partial \epsilon_{ij}^p}} \quad (10)$$

ここで、 $R = (\frac{m_{ij}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3} \beta \delta_{ij}) \frac{\partial K}{\partial \epsilon_{ij}^p}$, $m_{ij} = S_{ij} / n S_{FE} = S_{ij} / \sqrt{2} J_2$, $\alpha = \frac{4}{3}$ と置いて(10)式を(8)式に代入すれば、RudnikとRiceの構成式(3), (6)が得られる。弾塑性構成則は次のように与えられる。

$$d\sigma_{ij} = \left[E_{ijkl} - \frac{E_{ijkl} \left(\frac{S_{FE}}{2\sqrt{J_2}} + \frac{\beta}{3} \delta_{FE} \right) \left(\frac{S_{FE}}{2\sqrt{J_2}} + \alpha \delta_{FE} \right) E_{mmnl}}{R + \left(\frac{S_{FE}}{2\sqrt{J_2}} + \alpha \delta_{FE} \right) E_{FErs} \left(\frac{S_{FE}}{2\sqrt{J_2}} + \frac{\beta}{3} \delta_{FE} \right)} \right] d\epsilon_{kl}, \quad R = \left(\frac{S_{ij}}{2\sqrt{J_2}} + \frac{\beta}{3} \delta_{ij} \right) \frac{\partial K}{\partial \epsilon_{ij}^p} \quad (11)$$

E_{ijkl} : 弾性マトリクス

(11)式において実験によって定められるべきパラメータは α, β, R の3つである。 α は通常の三軸圧縮試験を行う降伏応力 $\sigma_{FE}-\sqrt{J_2}$ 座標系にプロットし直線近似した時の傾きである。 α を定めた後、実験によって次の関数 $H(\bar{P}) = \sqrt{J_2} + \alpha \sigma_{FE}$ の形で定める。(4)式より R は $\frac{\partial H}{\partial \bar{P}} = \frac{1}{R}$ で与えられる。 β は通常の三軸試験において側方変位を測定することによって定めることができる。図1は大谷石の J_1 -一定三軸試験結果を用いて、 $\bar{P} = \sigma_{FE}^p$, $\bar{P}^p = (2e_{ij}^p e_{ij}^p)^{1/2}$ を軸にとってプロットしたものである。

β はこの曲線への原点を通る接線の傾きで与えられる。図2はこうして求めた β を $J_1 = \sigma_{FE}$ で整理したものである。なお、図2には σ_3 -一定試験についても図1と同様のものを描き β を求めて降伏時の J_1 で整理してプロットしてある。実験データは大谷石のものであるが、他の材料についても図2に見るように直線近似が可能であるとすれば β は次式で与えられる。

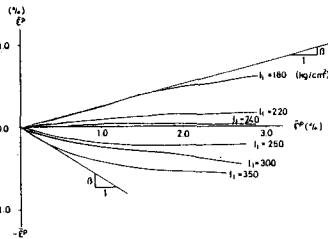


図1. $\bar{P}-\bar{P}^p$ 曲線と β (接線の傾き)

$$\beta(J_1) = \beta^* + \frac{\beta^{**} - \beta^*}{J_1^{**} - J_1^*} J_1 \quad \text{ただし } J_1 \geq J_1^* \text{ (一軸圧縮強度)} \quad (12)$$

ここに J_1^*, J_1^{**} は任意の等方圧, β^*, β^{**} はその時のダイレイタンスー係数である。こうして β が定まれば R と共に(11)の偏微分方程式に代入してこれを解くことによって K が定まる。

4. おわりに 三軸試験で側方変位を測定すればダイレイタンスー係数 β を定めることができる、この β を用いれば塑性ポテンシャル関数 ϕ を決定する

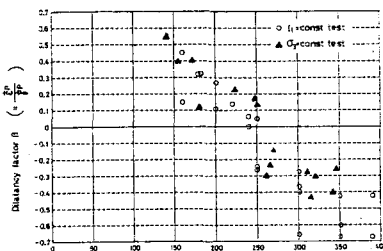


図2. 降伏時の J_1 による β の変化

ることなく非関連流れ則による構成式が得られる。なお、本報告で用いた三軸試験結果は伊藤文雄(昭和56年度)大橋敏行(昭和57年度)名古屋大学大学院 地盤工学専攻 修士論文に基くものである。

(参考文献) 1) Rudnik, J.W. and Rice J.R. - "Conditions for the Localization of Deformation in

Pressure-Sensitive Dilatant Materials," J. Mech. Phys. Solids, vol. 23, pp. 371-374 (1975)