## I-19　陽的差分法による熱伝導方程式の解の数値安定性に関する基礎的研究


岡山大学工学部　正　員　谷口健男

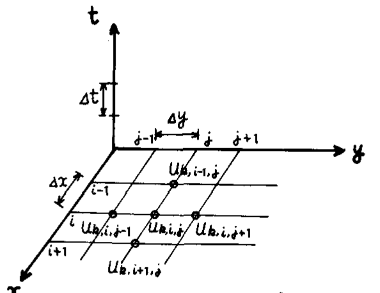
岡山大学大学院　学生員 ○松本　巧


### 1．まえがき

熱伝導方程式を有限要素法や差分法で解くと大次元の方程式となり、一般に陰解法より陽解法が好まれる。空間、時間の全ての軸を差分近似した時の数値安定性に関して研究がなされているが、今日では、空間を有限要素法で、時間を差分法で近似することが多く、このような場合の数値解の安定性の為の条件式が不明である。本研究では、まず全ての軸を差分法で離散化した時の安定条件式を誘導し、次いで空間を有限要素法、時間を差分法で離散化した時の時間及び空間の刻み幅の関係式を数値実験で求め、1つの規準を導びく。

### 2．陽差分式に対する安定性

空間1次元の熱伝導方程式の一般形は $\frac{\partial U}{\partial T}=K\frac{\partial^2 U}{\partial X^2}$ (K：定数)……① で与えられる。①式を無次元化すると $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$……②を得る。②式に対する安定条件式は $\Delta t \leqq \frac{1}{2\cdot\Delta x^2}$……③となることが文献よりわかっている。次に空間2次元の場合を考えてみる。空間2次元の熱伝導方程式の一般形は $\frac{\partial U}{\partial T}=K\left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}\right)$ (K：定数)……④ で与えられる。④式を無次元化すると $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$……⑤を得る。ここで図－1に示すように、$x=i\Delta x$ $(i=0,1,2,\cdots\cdots)$, $y=j\Delta y$ $(j=0,1,2,\cdots\cdots)$, $t=k\Delta t$ $(k=0,1,2,\cdots\cdots)$とすると、無次元化された⑤式に対する1つの陽差分近似式は次のようになる。




**図－1 差分法における格子点**

$$\frac{u_{k+1,i,j}-u_{k,i,j}}{\Delta t}=\frac{u_{k,i-1,j}-2u_{k,i,j}+u_{k,i+1,j}}{\Delta x^2}+\frac{u_{k,i,j-1}-2u_{k,i,j}+u_{k,i,j-1}}{\Delta y^2}\cdots\cdots⑥$$

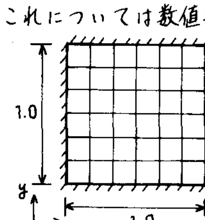
時刻$t_k$の時の$u$のベクトルを$\tilde{u}_k$, 時刻$t_{k+1}$の時の$u$のベクトルを$\tilde{u}_{k+1}$とすると、$\tilde{u}_{k+1}=A\cdot\tilde{u}_k$……⑦のように表現できる。今、領域をx方向にM個、y方向にN個に分割する。まずAマトリックスを $A=\frac{1}{2}I+\frac{\Delta t}{\Delta x^2}T_{M-1}+\frac{1}{2}I+\frac{\Delta t}{\Delta y^2}T_{N-1}$……⑧と分割する。マトリックス$T_{M-1}$, $T_{N-1}$の固有値はそれぞれ $\lambda_s=-4\sin^2\left(\frac{s\pi}{2M}\right)$ $(S=0,1,2,\cdots\cdots)$……⑨ $\lambda_t=-4\sin^2\left(\frac{t\pi}{2N}\right)$ $(t=0,1,2,\cdots\cdots)$……⑩ であるから、Aマトリックスの固有値は、$1-4\left\{\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\sin^2\left(\frac{s\pi}{2M}\right)+\frac{\Delta t}{\Delta y^2}\left(\frac{t\pi}{2N}\right)\right\}$となる。よって陽公式の安定性に関する条件は $\left|1-4\left\{\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\sin^2\left(\frac{s\pi}{2M}\right)+\frac{\Delta t}{\Delta y^2}\sin^2\left(\frac{t\pi}{2N}\right)\right\}\right|\leqq 1$……⑪ となるから、$\Delta t\left\{\frac{1}{\Delta x^2}\sin^2\left(\frac{s\pi}{2M}\right)+\frac{1}{\Delta y^2}\sin^2\left(\frac{t\pi}{2N}\right)\right\}\leqq\frac{1}{2}$……⑫ となり、これより最小の$\Delta t$を与える式は次式になる。

$\Delta t\leqq\frac{\Delta x^2\Delta y^2}{2\cdot(\Delta x^2+\Delta y^2)}$……⑬ 同様にして、空間3次元ならば安定条件を与える式は次式になる。

$$\Delta t\leqq\frac{\Delta x^2\Delta y^2\Delta z^2}{2\cdot(\Delta y^2\Delta z^2+\Delta z^2\Delta x^2+\Delta x^2\Delta y^2}\cdots\cdots⑭$$

### 3．有限要素法、差分法混用に対する安定性

次に空間を有限要素法で離散した場合、安定条件を与える式について考えてみる。これについては数値実験を行なった。まず、図－2に示すような単位領域を考え、四周辺を固定し、中心点を熱するという形を取って、熱伝導方程式を解いた。実験に対しては、適当な$\Delta t$を入れて安定するか安定しないか判定する方法を取って、限界の時間ステップを求めた。その結果を表－1に示す。表－1より次のことがわかる。 i) $\Delta x$, $\Delta y$ とも$\alpha$倍すれば、限界の時間ステップは$\alpha^2$に比例して増大する。 ii) $\Delta y$を固定して$\Delta x$を2倍、4倍していくと、$\Delta x$の倍率を$r$とすれば、$\Delta t$は$\sqrt{r}$に比例する形で表わされ




**図－2 単位領域**

る。これらのことを考えて、$\Delta t$ を $\Delta x, \Delta y$ で表わせば、差分法よりの安定条件式⑬と同じような形、すなわち次式で表わされる。

$$\Delta t \leqq \alpha \frac{\Delta x^2 \Delta y^2}{\Delta x^2 + \Delta y^2} \quad \cdots\cdots ⑮$$

表－1の $\Delta t$ の値に最もよく合わせるためには、$\alpha = \frac{3}{4}$ が適当である。しかし、⑮式は無次元長さ $\Delta x, \Delta y$ を考えているので、⑮式を実際の要素の長さ $\Delta X, \Delta Y$ で置き換えると次式になる。

$$\Delta T \leqq K \cdot \alpha \cdot \frac{\Delta X^2 \Delta Y^2}{\Delta X^2 + \Delta Y^2} \quad \cdots\cdots ⑯$$

⑯式が成り立つかどうか確かめるために、K＝1として、領域を実際の長さに区切って実験を行ない、限界の時間ステップを求めた。その結果を表－2に示す。また表－3に⑯式で $\alpha = \frac{3}{4}$ とした場合の限界の時間ステップを示す。表－2と表－3を比較すると、表－3の方が $\Delta X, \Delta Y$ とも大きくなると差が大きくなる。しかしこの実験では、総節点数、全体の領域の長さがいろいろ異なっているために、⑯式の形で限界の時間ステップを表わすのには無理があるかもしれない。まず⑮式の形で表わし、それに領域の長さを考慮に入れた式が最良だと考えられる。あくまでも⑯式の形で表わすとすれば、⑯式の右辺に要素の長さに比例した低減係数を掛ける必要がある。しかし $\Delta T$ を決定する上で、⑯式はおおまかな目安となる。

**表－1 限界の時間ステップ（×10⁻⁴）**

| $\Delta x$ ＼ $\Delta y$ | 0.025 | 0.050 | 0.100 | 0.167 |
|---|---|---|---|---|
| 0.025 | 2.34 | | | |
| 0.050 | 3.74 | 9.37 | | |
| 0.100 | 4.41 | 14.99 | 37.49 | |
| 0.167 | 4.58 | 17.20 | 55.14 | 104.1 |

**表－2 限界の時間ステップ（実験値）**

| $\Delta X$ ＼ $\Delta Y$ | 2.56 | 5.26 | 11.11 | 20.00 |
|---|---|---|---|---|
| 2.56 | 2.40 | | | |
| 5.13 | 3.77 | | | |
| 5.26 | 3.79 | 9.84 | | |
| 10.53 | 4.29 | 15.65 | | |
| 11.11 | 4.31 | 15.93 | 41.5 | |
| 20.00 | 4.40 | 17.68 | 62.89 | 120.00 |
| 22.22 | 4.42 | 17.83 | 65.84 | |
| 40.00 | 4.45 | 18.25 | 75.36 | 191.99 |

**表－3 限界の時間ステップ（予測値）（$\alpha = 3/4$）**

| $\Delta X$ ＼ $\Delta Y$ | 2.56 | 5.26 | 11.11 | 20.00 |
|---|---|---|---|---|
| 2.56 | 2.46 | | | |
| 5.13 | 3.94 | | | |
| 5.26 | 3.97 | 10.38 | | |
| 10.53 | 4.64 | 16.61 | | |
| 11.11 | 4.67 | 16.95 | 46.29 | |
| 20.00 | 4.84 | 19.41 | 70.74 | 150.00 |
| 22.22 | 4.85 | 19.65 | 74.06 | |
| 40.00 | 4.90 | 20.40 | 85.94 | 240.00 |

## 4．あとがき

本研究の目的は、熱伝導方程式を、空間軸に対しては有限要素を用い、また、時間軸に対しては陽差分を用いて離散化するという、有限要素法、差分法両数値解法を混用して解を求める場合、問題となる解の安定のための限界時間ステップを求めることにあり、空間軸を一様に離散化した場合に対しては、⑯式の関係を得た。それをまとめると、

(1) 全てを差分形で離散化する場合より、有限要素法を用いた方が、限界時間ステップを1.5倍程度大きくすることができる。

(2) 全てを差分形で離散化した場合の限界時間ステップは、容易に⑬式を用いて解析的に求められ、更にその値は、有限要素法混用の場合と比較して小さい値をとる。

(3) 従って、解の精度等を考慮した場合、限界時間ステップは、差分形式でのものを一応の目安にすることができる。

なお、上記結論は、三角形メッシュを用い、更に一様分割という条件下での数値実験より導びき出されたものである。従って、今後の問題点として、空間軸の離散に関しては、(1) 他の有限要素メッシュ (2) 不均一なメッシュ分割 (3) 系の形状、そして、時間軸の離散に関しても、他の陽的差分法を用いた実験を行う必要があり、同時に、本報告、第2節で展開してみせたような差分形と同様な理論的なアプローチの確立が望まれる。

参考文献

G・D・スミス著　藤川洋一郎訳“電算機による偏微分方程式の解法”サイエンス社　PP. 9～17，PP. 60～67