

豊橋大学工学部 正員 大賀水田生
徳山高専 正員 重松 恒美
徳山高専 正員 原 隆

1. まえがき 著者は通常の有限要素法に用いられる剛性マトリックスより誘導される伝達マトリックスを用いる方法(FETM法)を線形問題に適用し、解の精度を落とさなく、有限要素法に必要なマトリックスサイズよりかなり小さなマトリックスの演算により解を求めることができることを報告している^(1,2)。そこで、本研究ではFETM法の非線形問題への適用を試み、二、三の数値計算を行い、得られた結果を有限要素法などによる結果と比較することにより、本法の非線形問題への適用の妥当性・有効性を検討する。解析手法としては増分法を用い、弾塑性挙動に関して材料はPrandtl-Reussの式に従うものとし、降伏の判定にはVon Misesの降伏条件を用いた。さらに終動座標を用い、剛体変位を除去することにより幾何学的非線形性を考慮した。

2. FETM法の概要 図-1(a)に示される板を m 個のstripに分割し、さらにそれぞれstripを $2(n+1)$ 個の有限要素に分割する(図-1(b))。次に要素剛性マトリックスをそれぞれstripに組み込むことにより得られるstrip剛性マトリックスを変換することによりstripの左側節線上の節点変位と節点力を右側節線上のそれらと結びつける伝達マトリックスが次のように求められる。

$$\begin{Bmatrix} \delta_r \\ F_r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -K_{er}^{-1} K_{ee} & K_{er}^{-1} \\ K_{re} - K_{rr} K_{er}^{-1} K_{ee} & K_{rr} K_{er}^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_e \\ F_e \end{Bmatrix} \quad (1)$$

ここで、 $\delta_e, \delta_r, F_e, F_r$ はそれぞれstripの左側および右側節線上の節点変位と節点力、 $K_{ee}, K_{er}, K_{rr}, K_{re}$ はそれぞれstrip剛性マトリックス K のサブマトリックス。

得られた伝達マトリックスを掛け合すことにより、左端の状態量を右端に伝達し、左右の境界条件を考慮することにより未知状態量を決定する。

3. 接線剛性マトリックスの誘導 本研究においては要素として図-2に示す5節点自由度($u, v, w, \theta_x, \theta_y$)を有する三角形要素を使用した。ところで解析は荷重増分法に基づいており、ひずみ増分と変位増分の関係は次のように与えられる。

$$\Delta \varepsilon = \Delta \varepsilon_p + \Delta \varepsilon_g + \Delta \varepsilon_o - \Delta \varepsilon_B \quad (2)$$

ここで、 $\Delta \varepsilon_p = \{ \partial u / \partial x, \partial v / \partial y, \partial u / \partial y + \partial v / \partial x \}^T$, $\Delta \varepsilon_g = 1/2 \cdot \{ (\partial w / \partial x)^2, (\partial w / \partial y)^2, 2 \partial w / \partial x \cdot \partial w / \partial y \}^T$, $\Delta \varepsilon_o = \{ \partial w / \partial x, \partial w / \partial y, \partial w / \partial x \cdot \partial w / \partial y + \partial w / \partial y \cdot \partial w / \partial x \}^T$, $\Delta \varepsilon_B = 2 \{ \partial^2 u / \partial x^2, \partial^2 w / \partial y^2, 2 \partial^2 w / \partial x \partial y \}^T$

また、応力増分は次式で表わされる。

$$\Delta \sigma = D \Delta \varepsilon \quad (3)$$

ここで、 D は応力-ひずみマトリックスであり、塑性域においてはPrandtl-Reussの式にVon Misesの降伏条件

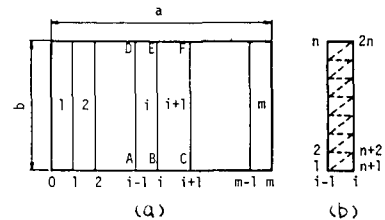


図-1 要素分割

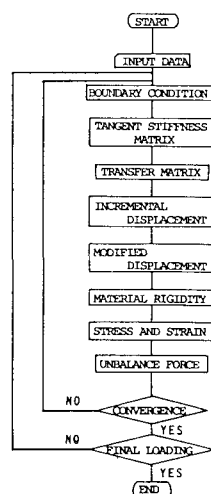


図-3 FETM法

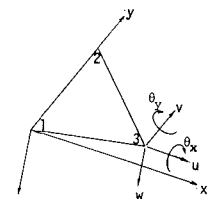


図-2 三角形要素

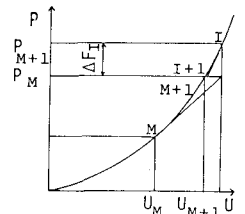


図-4 収束計算

を適用することにより得られる応力-ひずみマトリックス D_p を用いる。
また、塑性域での収束計算におけるくり返し回数を低減するため、増分荷重に対して弾性域から塑性域に移行する要素については、次式で与えられる応力-ひずみマトリックス D_{ep} を使用した。ただし、 r は重み係数である。

$$D_{ep} = r D_e + (1-r) D_p \quad (4)$$

そして、接線剛性マトリックス K は式(2)、(3)で表わされるひずみ増分、応力増分を用いて、仮想仕事の原理により誘導される。

3. 計算手順 本研究で開発した FETM 法の弾塑性有限変位解析プログラムのフローチャートを図-3 に示す。この解析手順は荷重増分法による有限要素法のそれと類似しているが、変位増分の推定において有限要素法では構造物全体の剛性マトリックスを組み立てる必要があるのに対し、本法では伝達マトリックス法の手順により変位増分の推定を行うので、一つの strip の剛性マトリックスを組み立てるのみで解析を行える特徴を有している。収束計算は図-4 に示すような Newton-Raphson 法により行った。さらに、塑性化した要素の応力分布を考慮するため板厚方向に層割りを行ったが、その際、各層での応力分布は直線分布とし、精度の向上を計った。

4. 数値計算および検証 開発したプログラムを用いて数値計算を行った。図-5 に周辺固定の板が等分布荷重を受ける場合のセンターでの荷重-たわみ曲線を示している。なお、解析モデルは対称性を考慮して $1/4$ 板とし、分割数は 3-3、4-4、そして 5-5 の 3通りとした。また、ここでは幾何学的非線形性のみを考慮し、材料の非線形性は考慮していない。本法による結果は井川・吉村、Schmidt として Harbord による結果より少し大きめであるが良く一致している。図-6 にセンターの荷重-応力曲線を示しているが、膜応力、引張り応力そして圧縮応力とも井川・吉村および Schmidt による結果と良く一致している。図-7 に材料の非線形性も同時に考慮した場合の結果を示している。層割りは 2, 4, 6, 8 であるが、いずれの層数でもたわみ曲線にそれほどの差は認められない。図-9 に図-8 に示すような 4 本の中間支柱を有する床版の中間支柱に沿った線上でのたわみ曲線を示している。この場合の解析モデルは対称性を考慮して $1/2$ 板で、分割数は 8-4 である。本法と同一要素および同一分割数を用いた有限要素法による結果も同時に示しているが両者は全く一致している。

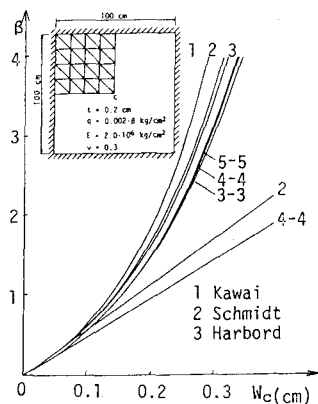


図-5 荷重-たわみ曲線

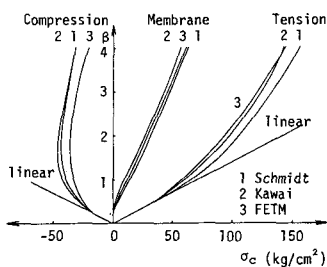


図-6 荷重-応力曲線

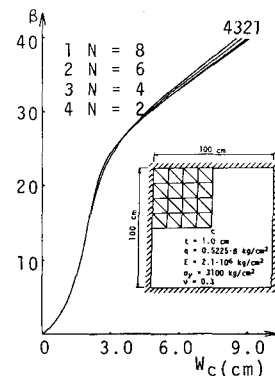


図-7 荷重-たわみ曲線

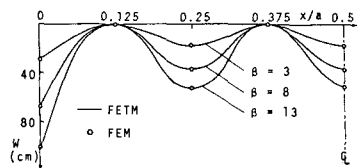


図-9 たわみ曲線

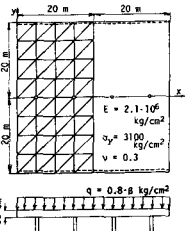


図-8 解析モデル

参考文献

- 1) 見代他；FE-TMによる板の屈曲解析、第15回マシックス解析法研究発表論議、1981, 7,
- 2) 大賀他；FE-TMによる板の曲げ解析、土木学会中部支部学術講演要集、1982, 5,
- 3) 小松他；残留応力および初期ひずみを持つ圧縮板の弾塑性解析、土木学会論文報告集、第244号、1975, 12