I-17　鏡像の原理による有孔無限板の二次元弾性問題の解析

三角形孔の場合

建　設　省　正員　松浦　弘
北海道大学工学部　正員　渡辺　昇

1. まえがき

有孔無限板の応力を鏡像の原理を用いて複素応力関数により解く。実平面(Z 平面)上の孔を写像関数を用いて補助平面(ζ 平面)上の単位円と対応させ、実平面における応力を補助平面の点の関数として求める。

2. 応力の複素表示

応力 σ,τ は2つの Goursat の解析関数 $\varphi(z),\phi(z)$ を用いて次のように表わされる。

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \mathrm{Re}\left[2\varphi'(z) - \{\bar{z}\varphi''(z) + \phi''(z)\}\right] \\ \sigma_y &= \mathrm{Re}\left[2\varphi'(z) + \{\bar{z}\varphi''(z) + \phi''(z)\}\right] \\ \tau_{xy} &= \mathrm{Im}\left[\bar{z}\varphi''(z) + \phi''(z)\right] \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

3. 境界条件

有孔無限板では境界条件として、無限遠点における応力状態 および 孔辺の拘束条件を考える。前者は無限遠において解析関数が孔の無い場合に一致することを意味する。すなわち、

$$\varphi_0(z) = Az \quad , \quad \phi_0(z) = Bz^2 \quad (2)$$

である。A と B は無限遠点の応力から決まる係数であり、一様な応力の場合、次のようになる。

$$A = (\sigma_{x0} + \sigma_{y0})/4 \ , \quad B = (\sigma_{y0} - \sigma_{x0} + i2\tau_{xy0})/4 \quad (3)$$

後者の条件は新しい関数として、

$$\chi(z) = \bar{z}\varphi'(z) + \phi'(z) \quad (4)$$

を定義しておけば、孔辺が自由の場合には孔辺上で次式の形で与えられる。

$$\varphi(z) = -\overline{\chi(z)} \quad (5)$$

4. 解析

実平面上の解析関数 $\varphi(z)$, $\phi(z)$ は写像関数 $z = f(\zeta)$ により次のように表わされる。

$$\left.\begin{aligned} &\varphi(z) = \Phi(\zeta) = \varphi\left[f(\zeta)\right] && \phi(z) = \Psi(\zeta) = \phi\left[f(\zeta)\right] \\ &\varphi'(z) = \Phi^{\mathrm{I}}(\zeta) = \Phi'(\zeta)/f'(\zeta) && \phi'(z) = \Psi^{\mathrm{I}}(\zeta) = \Psi'(\zeta)/f'(\zeta) \\ &\varphi''(z) = \Phi^{\mathrm{II}}(\zeta) = \{\Phi''(\zeta)f'(\zeta) - \Phi'(\zeta)f''(\zeta)\}/\{f'(\zeta)\}^3, && \phi''(z) = \Psi^{\mathrm{II}}(\zeta) = \{\Psi''(\zeta)f'(\zeta) - \Psi'(\zeta)f''(\zeta)\}/\{f'(\zeta)\}^3 \end{aligned}\right\} (6)$$

同様に、式(4)は ζ の鏡像を $\Omega(\zeta)$ として次式で表わされる。

$$X(\zeta) = f(\Omega(\zeta))\cdot\Phi^{\mathrm{I}}(\zeta) + \Psi^{\mathrm{I}}(\zeta) \quad (7)$$

式(6)の関係から無限遠点における解析関数は、$s(\zeta) = \lim_{\zeta\to\infty} f(\zeta)$ として、

$$\left.\begin{aligned} &\Phi_0(\zeta) = \varphi_0(z) = Az = As(\zeta) \quad , && \Phi_0^{\mathrm{I}}(\zeta) = \varphi_0'(z) = A \\ &\Psi_0(\zeta) = \phi_0(z) = Bz^2 = B\{s(\zeta)\}^2 \quad , && \Psi_0^{\mathrm{I}}(\zeta) = \phi_0'(z) = 2Bz = 2Bs(\zeta) \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

となる。また式(7)については、$p(\zeta) = \lim_{\zeta\to\infty} \bar{f}(\Omega(\zeta))$ として次式となる。

$$X_0(\zeta) = Ap(\zeta) + 2Bs(\zeta) \quad (9)$$

孔辺が自由であれば、式(5)より鏡像の関数は、$q(\zeta) = -\bar{p}(\Omega(\zeta))$, $t(\zeta) = -\bar{s}(\Omega(\zeta))$ として、

$$\Phi_*(\zeta) = -\bar{X}(\Omega(\zeta)) = \bar{A}q(\zeta) + 2\bar{B}t(\zeta) \quad (10)$$

$$X_*(\zeta) = -\bar{\Phi}(\Omega(\zeta)) = \bar{A}t(\zeta) \quad (11)$$

であるから、有孔板の解析関数は無限遠での関数と鏡像の関数とを重ね合わせたものとなる。

$$\Phi(\zeta) = A\{s(\zeta) + q(\zeta)\} + 2\bar{B}t(\zeta) \quad (12)$$

$$X(\zeta) = A\{t(\zeta) + p(\zeta)\} + 2Bs(\zeta) \quad (13)$$

以上より応力を求めるには、$g(\zeta) = -\bar{f}(\Omega(\zeta))$, $h(\zeta) = \overline{f(\zeta)}$ とおいて次式を計算すればよい。

$$\varphi' = \{A(s' + q') + 2\bar{B}t'\}/f' \quad (14)$$

$$\bar{z}\varphi'' + \psi'' = \Big[A\Big[\{(s''+q'')f' - (s'+q')f''\}(g+h) + (t'+p')\cdot(f')^2 + (s'+q')f'g'\Big] + 2Bs'(f')^2 + 2\bar{B}\{(t''f'-t'f'')(g+h)+t'f'g'\}\Big] \,/\, (f')^3 \qquad (15)$$

5．計算例

右図のような三角形孔を考える。写像関数は次式である。

$$f(\zeta) = C\left(\zeta + \frac{1}{m}\zeta^{-2}\right) \qquad (16)$$

ただし、$C = \dfrac{m}{m+1}\,Ra\cdot e^{i\gamma}$ (17)

$2 \leqq m$

m = 2 で先がとがり、m が大きくなるにつれて丸くなる。

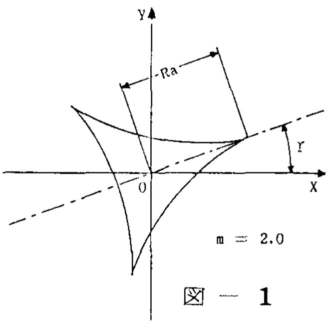

図 − 1

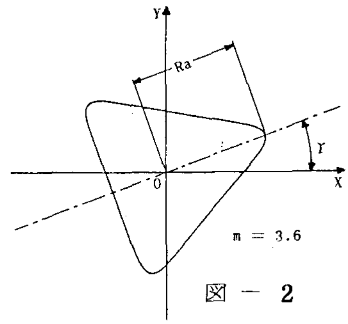

図 − 2

1) 孔辺の応力

傾角 γ = 0 の場合

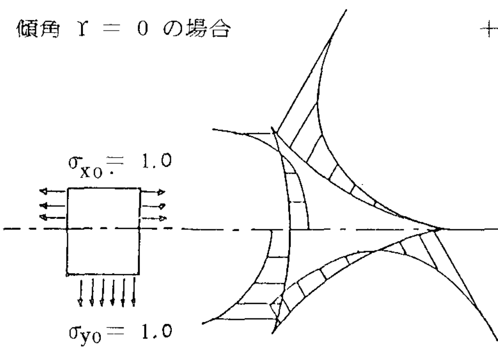

図 − 3

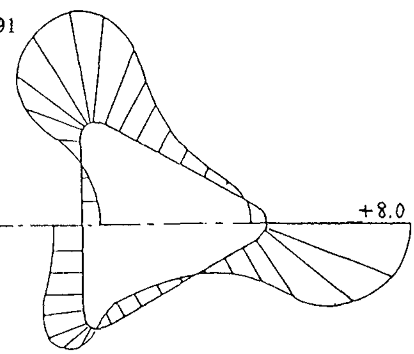

図 − 4

2) 一様な引張応力 $\sigma_{y0} = 1.0$ が作用するときの X 軸上の応力

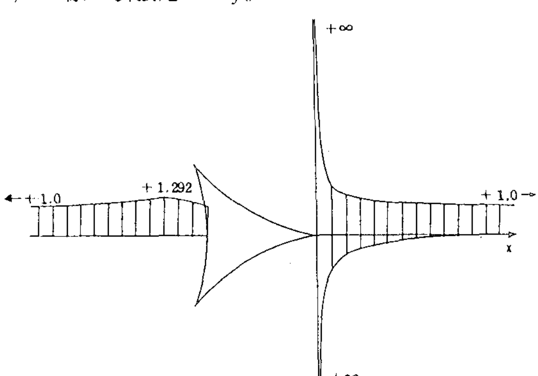

図 − 5

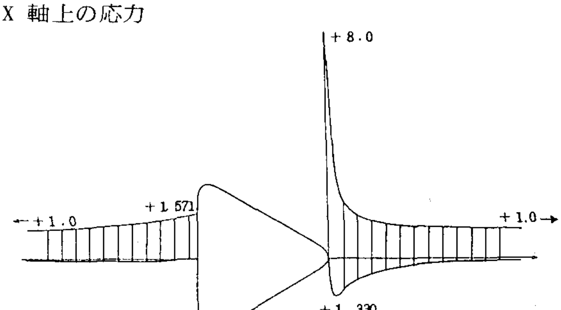

図 − 6

3) 係数 m を変えて X 軸上の応力の値を求める。

m	2.0	3.0	3.6	5.0	7.0	10.0	100.0	∞
σ	∞	11.0	8.0	5.667	4.6	4.0	3.082	3.0

参考文献

1）森口繁一：二次元弾性論、岩波書店

2）小平邦彦：岩波講座　複素解析 1，2，3、岩波書店

3）渡辺、林川、栗橋：鏡像の原理による有孔無限板の二次元弾性問題の解析(ハート型孔の場合)、第37回年次学術講演概要集