

長崎大学 正員 松田 浩
正員 崎山 毅

1. まえがき

地盤上の平析の解析について古くから多くの研究が行なわれてきているが、任意の境界条件、荷重条件および変断面性に対する解析の容易さおよび解法の一般性という点に注目すれば、地盤上の平板の解法に関して、未だ検討の余地が残されていると考えられる。

本解析法は、変厚板を基礎微分方程式に基づいて直接的に解析できる解析法¹⁾であり、今回は比較的研究報告が少ないと考えられる非線形地盤上の変厚板の問題に、この解法を応用したものである。

2. 基礎方程式

平板のせん断力を Q_y, Q_x , ねじりモーメントを M_{xy} , 曲げモーメントを M_y, M_x , たわみ角を θ_y, θ_x , たわみを w とすれば、地盤上の変厚板を含む一般矩形板の曲げに関する基礎方程式は次の連立偏微分方程式となる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \bar{g} - k w &= 0, \quad \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0, \quad \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0, \quad \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \theta_y}{\partial y} = \frac{M_x}{D} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \theta_x}{\partial x} &= \frac{M_y}{D}, \quad \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} = \frac{2}{D(1-\nu)} M_{xy}, \quad \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x = \frac{Q_x}{G t_s}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y = \frac{Q_y}{G t_s} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここに、 $\bar{g} = \bar{g}(x, y)$: 横荷重強度, E : 弾性係数, G : せん断弾性係数, ν : ポアソン比, $k = k(x, y)$: 板厚, $D = E k^3 / 12(1-\nu^2)$: 板剛度, $t_s = R/1.2$, $k = k(x, y)$: ばね定数

式(1)を無次元化すると次の式(2)のように書き換えられる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X_1}{\partial \xi} + \mu \frac{\partial X_2}{\partial \eta} &= -\bar{g} + k X_8, \quad \frac{\partial X_3}{\partial \xi} + \mu \frac{\partial X_5}{\partial \eta} = \mu X_2, \quad \frac{\partial X_4}{\partial \xi} + \mu \frac{\partial X_6}{\partial \eta} = \mu X_1, \quad \frac{\partial X_6}{\partial \xi} + \nu \mu \frac{\partial X_7}{\partial \eta} = I X_4 \\ \nu \frac{\partial X_6}{\partial \xi} + \mu \frac{\partial X_7}{\partial \eta} &= I X_5, \quad \frac{\partial X_7}{\partial \xi} + \mu \frac{\partial X_6}{\partial \eta} = J X_3, \quad \frac{\partial X_8}{\partial \xi} + X_7 = K X_2, \quad \frac{\partial X_8}{\partial \xi} + \mu X_6 = \mu K X_1 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここに、 $(X_1, X_2) = (Q_y, Q_x) a^2 / D_0 (1-\nu^2)$, $(X_3, X_4, X_5) = (M_{xy}, M_y, M_x) a / D_0 (1-\nu^2)$, $(X_6, X_7) = (\theta_y, \theta_x)$, $X_8 = w/a$, $\xi = a\eta$, $\eta = b\xi$, a, b : 矩形板の縦横の辺長, $\mu = b/a$, $\bar{g} = \mu k \bar{g}_0 / g_0$, $K = g_0 a^3 / D_0 (1-\nu^2)$, $R = \mu L k / k_0$, $L = k_0 a^4 / D_0 (1-\nu^2)$, g_0 : 基準荷重強度, k_0 : 基準ばね定数, $I = \mu (1-\nu^2) (k_0 / R)^3$, $J = 2\mu (1+\nu) (k_0 / R)^3$, k_0 : 基準板厚, $K = E R^3 / 10 G a^2 R$, $D_0 = E R^3 / 12 (1-\nu^2)$: 基準板剛度

3. 基礎方程式の近似解

連立偏微分方程式(2)の各式を面積分し、積分方程式に変換する。次に等間隔の数値積分法の応用により、積分方程式を離散表示すると、任意の分割点における無次元化された各断面力および変形は次式の様に表わせる。

$$X_{pij} = \sum_{t=1}^8 \left\{ \sum_{f=0}^{\frac{1}{2}P} \beta_{ft} A_{pt} [X_{tfo} - X_{tfs} (1-\delta_{ft})] + \sum_{g=0}^{\frac{1}{2}P} \beta_{fg} B_{pt} [X_{tfg} - X_{tfg} (1-\delta_{fg})] \right. \\ \left. + \sum_{f=0}^{\frac{1}{2}P} \sum_{g=0}^{\frac{1}{2}P} \beta_{ft} \beta_{fg} C_{ptfg} X_{tfs} (1-\delta_{ft} \delta_{fg}) \right\} - \sum_{f=0}^{\frac{1}{2}P} \sum_{g=0}^{\frac{1}{2}P} \beta_{ft} \beta_{fg} A_{pt} \bar{g}_{fs} \quad (3)$$

ここに、 $P = 1 \sim 8$, β : 等分間数値積分の重み係数, δ_{ij} : クロネッカーのデルタ
(3)式および任意の分割点の断面力および変形 X_{pij} は辺上の点のみで表わせることを示しており次式の様に書ける。

$$X_{pij} = \sum_{f=0}^{\frac{1}{2}P} \left(\sum_{t=0}^{\frac{1}{2}P} \bar{a}_{piftd} X_{rfo} + \sum_{g=0}^{\frac{1}{2}P} \bar{a}_{pifgd} X_{sog} \right) + \bar{g}_{pij} \quad (4)$$

ここに、 X_{rfo} , X_{sog} : 積分定数, $\bar{g}_{pij}$: 荷重項。なお、四辺四隅自由な平板(地盤上の平板)の積分定数および境界条件を図1に示す。

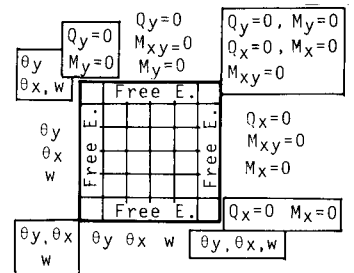


図1 積分定数および境界条件
(四辺四隅自由)

4. 数値計算結果および考察

本解析法による地盤上の矩形板の数値解の収束性および精度を検討するために、既往の近似解法による解析結果および解析解との比較を行った。

表1は、図2に示される周辺自由の正方形板の中央部に部分分布荷重が作用した場合の中央点のたわみ w_0 を示したものである。能町²⁾による厳密解と比較するとよく一致している。なお、この場合の地盤反力はWinklerの仮定に基づいている。

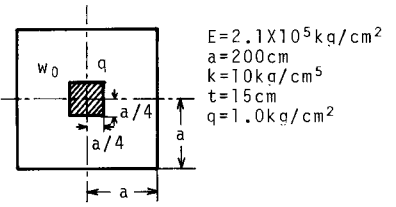


図2 部分分布等分布荷重載荷の場合

表1

Author	Kurata	Noumachi
0.03752	0.03785	0.0378

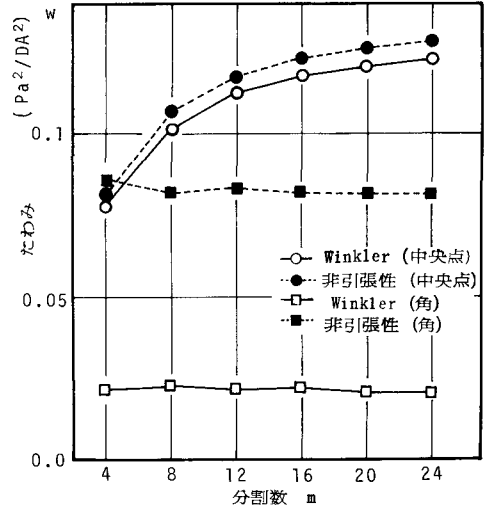


図3 分割数 m とたわみとの関係

図3は、分割数 m と中央点および隅角部のたわみとの関係を表わしたものである。同図より、本解析法に基づく変形の数値解は分割数 m の増加とともに一様に収束していることがわかる。図中の実線はWinklerの仮定に基づくもので、破線は地盤反力に引張力が存在しないとした場合である。なお荷重は集中荷重載荷である。

図4は種々のばねの場合の荷重と中央点のたわみとの関係を表したものである。同図で、指数形・双曲線形ばねとはそのばね性状に非線形性を示すもので、数値計算結果も非線形ばねの影響が顕著に表われていることがわかる。また隅角部の浮き上がり量については、負の反力を存在すると考えるか否かによって大きな差異がみられた。

図5は変厚板の中央点に集中荷重が作用した場合の $y=0$ 上の曲げモーメント M_x, M_y 、たわみ w を示したものである。この場合、板厚は x 方向にのみ直線的に変化($\beta=0.8 \sim 1.2$)し、地盤は双曲線関数形の非線形性状を示すばねを想定している。

5. 結論

非線形地盤上の変厚板の解析法を提示し、その妥当性の検証を行った。

(参考文献)

- 1) 崎山 松田, 変厚矩形板の曲げの解析法, 昭57年度土木学会関西支部研究発表会
- 2) 能町純雄, 弾性基礎にある四辺四隅自由な矩形板の曲げについて, 工学論集第32, 1956
- 3) 倉田宗幸他, 非線形ばね基礎上の周辺自由平板解析, 工学論集第38, 1972
- 4) 北村泰寿他, 弾性基礎上の四辺自由板の級数解, 土木学会 66, 64-3

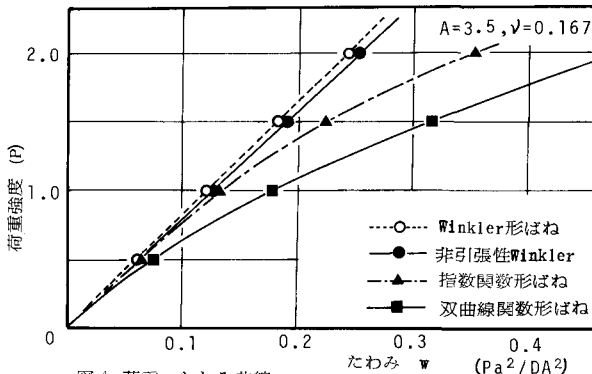


図4 荷重-たわみ曲線

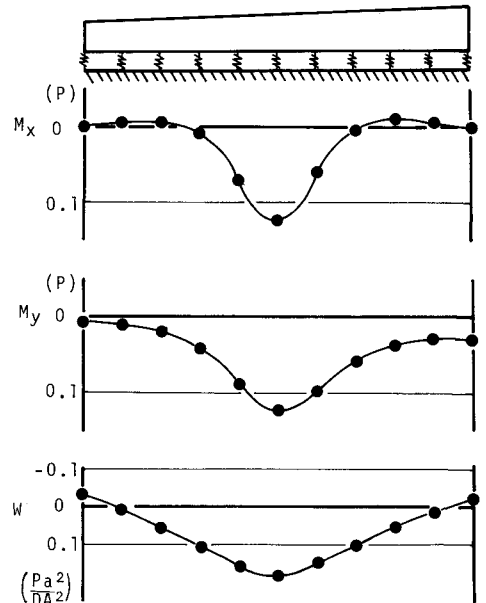


図5 非線形地盤上の変厚板の数値解析結果