

(株) 神戸製鋼所

正員 ○ 豊島 史郎

正員 中面 宏

正員 波田 凱天

1. はじめに 近年、川井らにより提案された剛体バネモデル¹⁾は、すべり線との対応がつけやすいこと、および不連続性を容易に導入できることなどの理由により、極限状態の検討を行なう場合の一つの有効な解析手法として定着しつつある。しかし、そこでの定式化は弾塑性解析を基本としているため、エネルギー積分の領域や材料定数の設定に関して若干の問題点が残っているように思われる。本文は、極限状態の解析を行なう立場より、剛体バネモデルを塑性力学における上界定理に基づいて定式化しようとするものである。そこでは、不連続な剛体速度場を動的相容速度場とするために、処罰法を導入している。本文の解析手法は顆粒体や土質などの極限状態の解析を行なう簡易法として有効と思われる。

2. 上界定理 塑性力学における上界定理は以下のように数式表示される。

$$\int_{S_c} F_i U_i dS \leq \int_V \sigma_{ij} \dot{E}_{ij} dV + \int_P R dU dS - \int_{S_f} F_i U_i dS \quad (1) \quad \text{ここに、} U_i: \text{動的相容速度}$$

$\dot{E}_{ij}, \sigma_{ij}: U_i$ より求められるひずみ速度および応力, dU : 相対すべり速度, R : 材料のせん断抵抗応力または相対すべりに対するせん断応力, F_i : 外力, S_f : 外力の与えられる境界面, S_c : 外部物体との接触面, P : 動的相容速度場の不連続面, U_i : 外部物体との接触面における速度である。本文では、動的相容速度場として、剛体バネモデルで用いられている不連続剛体速度場の適用を考えているため、式(1)の右辺第三項を無視することが可能となる。

3. 離散化と解法 図1に示すような隣接する要素①と②に注目する。要素内の速度場には、体積変化を主びない一定速度場を仮定する。要素①と②の接辺では速度成分に不連続が生じる。この不連続量は

$$\Delta U' = N U \quad (2) \quad \text{と表わされる。ここに、}$$

$$\Delta U' = \begin{bmatrix} \Delta U'_1 \\ \Delta U'_2 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} l & m & -l & -m \\ -m & l & m & -l \end{bmatrix} \quad (3)$$

である。 $\Delta U'$ は要素間の相対すべり速度であり、このすべりに伴って消費されるせん断仕事率 W_s は

$$W_s = R \int |\Delta U'| dl = R \int \sqrt{U'^T K_s U'} dl \quad (4)$$

と表わされる。ここに、 R はせん断抵抗であり

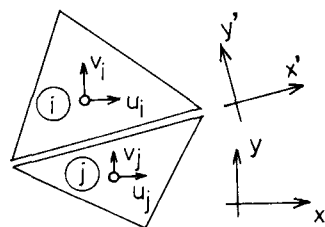
$$K_s = N^T D_s N, \quad D_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5) \quad \text{である。}$$

さて、接辺における垂直速度は連続であるから、 $\Delta V' = 0$ ではないといけない。ここでは、この拘束条件を処罰法

(penalty function method)³⁾により導入する。処罰項(処罰エネルギー) W_p は

$$W_p = \frac{1}{2} P \int (\Delta V')^2 dl = \frac{1}{2} P \int U'^T K_p U' dl \quad (6), \quad K_p = N^T D_p N, \quad D_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

と表わすことができる。ここに、 P は処罰定数であり大きな値である。



(x, y): 全体座標系
(x', y'): 局部座標系
(l, m): x' 軸の方向余弦
(-m, l): y' 軸の方向余弦
(U_i, V_i): ① 要素の速度成分
(U_j, V_j): ② 要素の速度成分

図1 要素の定式化

故に、消散エネルギーの関数 Π は

$$\Pi = W_s + W_p - W_F = k \int \sqrt{u^T K_s u} dl + \frac{1}{2} P \int u^T K_p u dl - u^T F \quad (8)$$

となる。なお、第3項は荷重項である。未知数 u について Π の極値化を行なうと

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u} = k \int \frac{K_s u}{\sqrt{u^T K_s u}} dl + P \int K_p u dl - F = 0 \quad (9)$$

を得る。この式は非線形方程式であるため、線形化を行なう。 $u_i = u_{i-1} + \Delta u_i \quad (10)$

を式(9)に代入して Δu_i の1次項までを採用すると、 $K \cdot \Delta u_i = H \quad (11)$ となる。ここに、

$$\left. \begin{aligned} K &= k \int \frac{1}{\sqrt{u_{i-1}^T K_s u_{i-1}}} \left\{ K_s - \frac{K_s u_{i-1} u_{i-1}^T K_s}{u_{i-1}^T K_s u_{i-1}} \right\} dl + P \int K_p dl \\ H &= F - k \int \frac{K_s u_{i-1}}{\sqrt{u_{i-1}^T K_s u_{i-1}}} dl - P \int K_p u_{i-1} dl \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

である。 Π の最小化においては、文献(4)の手法を用いる。ところで、本解析法では初期速度場が必要となるが、ここでは式(8)の第1項の被積分項を自乗した関数 $\sqrt{u^T K_s u}$ を最小化することにより初期速度場を推定している。また、式(12)において見られるように、分母にすべり量 $|u_{i-1}| = \sqrt{u_{i-1}^T K_s u_{i-1}}$ の1乗および3乗項が現われるため、 Δu_{i-1} が零に近づくとき数値計算が困難となる。そこで、 $|u_{i-1}| = |u_{i-1}| + \alpha \cdot |u_{i-1}|_{\max} \quad (13)$ と置いている。 $(\alpha$ は小さな値である。)

4. 数値計算例 図2は押出し加工のホドグラフ解析と本法を比較したものであり、両者の結果は一致することがわかる。図3は、サイロから粉粒体を排出した場合の壁圧分布を求めたものであり、既径の Jenike による実験(最大壁圧分布)と比較したものである。実験結果とはよく一致している。なお、この例ではオシロ目の反復計算におけるせん断抵抗も $k_i = \mu \cdot p_{i-1} \quad (14)$ とすることにより摩擦の影響を考慮している。ここに、 μ は摩擦係数であり、 p_{i-1} は $i-1$ 回目の要素境界の垂直応力である。また、要素分割は、簡易解析線解(5)のすべり線場を参考にした。

図2 押出し加工

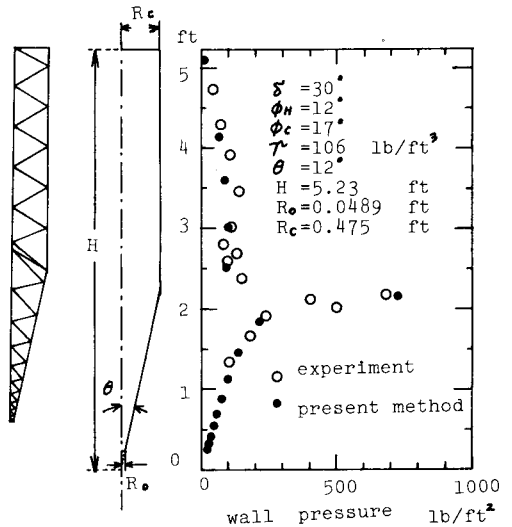


図3 排出時のサイロ壁圧

5. 参考文献

- 1) 川井忠彦: 新しい要素モデルによる固体力学諸問題の解析, 昭和52年
- 2) Hill, R: Mathematical Theory of Plasticity, Oxford University Press, 1957 (藤澤山田, 磯沢, 塑性学 法政館)
- 3) Zienkiewicz, O.C.: The Finite Element Method, 3rd. ed. McGraw-Hill, 1977
- 4) 中西宏, 渡田大: 最適値問題の手法による吊橋造りの形状決定解析, 日本建築学会論文報告集, 第224号, 1974-10
- 5) Johnson, W., P.B. Mellor: Engineering Plasticity, Van Nostrand Reinhold, 1973
- 6) Jenike, A.W., J.R. Johanson, L.W. Carson: Bin Loads-Part B, Transaction of the ASME, J. of Engg. for Ind. 95, 1, 6 (1973)
- 7) 豊島史郎, 中西宏, 渡田大: 貯槽内の排出時における粉粒体特性の簡易解析法, 工学会第37回年次学術講演要集第1部, 昭和57年10月, I-12