

大阪市立大学 正員・堀川都志雄

大阪市立大学 正員 園田恵一郎

1. はしがき 半無限弾性体に集中荷重が作用する場合の解として、周知のように Boussinesq, Cerruti および Mindlin のホエー、IIの解があげられる。さらに、ある任意幅を介して載荷される場合には、上記の解を積分することによって弾性体中の応力が求められ、フーチング等の基礎構造物の支持力算定に利用されている。また、半無限体の一方の弾性定数が他の方向のものと異なっている材料で構成されている横等方弾性体 (Transversely Isotropy) についても、S.G. Lekhnitsky, H.H. Michell, A.S. Lodge, Y.C. Pan らおよび松岡等の研究があげられる。等方や横等方性半無限体の集中荷重問題に対して、フーリエ変換や変位関数を用いることによって閉じた解 (Closed Solution) が誘導されている。しかしながら、直交異方弾性体に対して閉じた解を誘導することは非常に困難である。著者らは直交異方弾性体での3つの独立した変位関数を誘導し、全周単純支持された直交異方性厚板の上面荷重あるいは物体力が作用する場合の解を示した¹⁾。

本研究においては、これらの変位関数を利用して半無限直交異方弾性体の部分等分布荷重が作用する場合についての解をフーリエ変換を用いて誘導するものである。

2. 理論式

直交異方弾性体のフックの法則は次のように表わされる。

$$\begin{aligned}\sigma_x &= C_{11}\partial_x u + C_{12}\partial_y v + C_{13}\partial_z w, & \tau_{xy} &= C_{44}(\partial_x v + \partial_y u), \\ \sigma_y &= C_{21}\partial_x u + C_{22}\partial_y v + C_{23}\partial_z w, & \tau_{yz} &= C_{55}(\partial_x w + \partial_z u), \\ \sigma_z &= C_{31}\partial_x u + C_{32}\partial_y v + C_{33}\partial_z w, & \tau_{yz} &= C_{66}(\partial_y w + \partial_z v).\end{aligned}\quad (1)$$

ここで、 $C_{ij} = C_{ji}$ ($i, j = 1, 3$)、 $\partial_x = \partial/\partial x$ 、 $\partial_y = \partial/\partial y$ 、 $\partial_z = \partial/\partial z$ 。

変位関数 F_3^0 の基礎式と変位との関係式は以下に示される。

$$\nabla^2(x, y, z) F_3^0 = 0 \quad 2B_5[u \ v \ w]^T = [L_{31} \ L_{32} \ L_{33}]^T F_3^0 \quad (2)$$

ここで、 $B_5 = C_{55}$ 、 $\nabla^2(x, y, z)$ 、 L_{31} 、 L_{32} 、 L_{33} は関数 F_3^0 に対する微分演算子

変位関数 F_3^0 を x, y 方向にフーリエ変換すれば、

$$F_3^0 = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \begin{pmatrix} \cos \alpha x \\ \sin \alpha x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta y \\ \sin \beta y \end{pmatrix} d\alpha d\beta \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty F_3^0(\xi, \eta) \begin{pmatrix} \cos \alpha \xi \\ \sin \alpha \xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta \eta \\ \sin \beta \eta \end{pmatrix} d\xi d\eta \quad (3)$$

次に、関数 F_3^0 の z 方向の成分を e^{Pz} とすると、 P に関する特性方程式は

$$a_9 P^6 - (a_4 \alpha^2 + a_8 \beta^2) P^4 + (a_2 \alpha^4 + a_5 \alpha^2 \beta^2 + a_7 \beta^4) P^2 - (\alpha^6 + a_1 \alpha^4 \beta^2 + a_3 \alpha^2 \beta^4 + a_6 \beta^6) = 0 \quad (4)$$

等方や横等方性体では、式(4)は P に関する4次と2次の方程式に分離することができる。

さらに、 $z \rightarrow \infty$ で変位および応力がともに零になることを考慮すれば、関数 F_3^0 は次のような3つのタイプに分類される。

$$F_3^0 = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \begin{pmatrix} C_1 e^{-\lambda_1 z} + C_2 e^{-\lambda_2 z} + C_3 e^{-\lambda_3 z} \\ C_1 e^{-\lambda_1 z} + C_2 \lambda_2 e^{-\lambda_2 z} + C_3 e^{-\lambda_3 z} \\ C_1 e^{-\lambda_1 z} + C_2 e^{-\lambda_2 z} + C_3 e^{-\lambda_3 z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha x \\ \sin \alpha x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta y \\ \sin \beta y \end{pmatrix} d\alpha d\beta \quad (5)$$

ここで、 C_i ($i=1, 3$) は半無限体表面での境界条件より決定される積分定数

式(5)を(2)に代入すれば、変位 u が求められる。

$$2B_3 u = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \begin{pmatrix} C_1 e^{-\lambda z} (b_1 \sin \mu z - b_2 \cos \mu z) + C_2 e^{-\lambda z} (b_1 \cos \mu z + b_2 \sin \mu z) + C_3 b_3 e^{-\gamma z} \\ C_1 e_1 e^{-\lambda z} + C_2 (e_1 \lambda z - e_2) e^{-\lambda z} + C_3 e_3 e^{-\gamma z} \\ C_1 d_1 e^{-\lambda z} + C_2 d_2 e^{-\mu z} + C_3 d_3 e^{-\gamma z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \alpha x \\ \cos \alpha x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta y \\ \sin \beta y \end{pmatrix} d\alpha d\beta \quad (6)_{1,2,3}$$

他の変位 v および w も同様にして得られる。

さらに、式(6)を(1)に代入すれば、応力 $\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{yz}$ が容易に得られる。例えば、式(6-1)による応力 $\sigma_x, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ を以下に示す。

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \left[C_1 e^{-\lambda z} (A_1 \sin \mu z + A_2 \cos \mu z) + C_2 e^{-\lambda z} (A_1 \cos \mu z - A_2 \sin \mu z) + C_3 A_3 e^{-\gamma z} \right] \begin{pmatrix} \cos \alpha x \\ \sin \alpha x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta y \\ \sin \beta y \end{pmatrix} d\alpha d\beta \\ \tau_{xz} &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \left[C_1 e^{-\lambda z} (A_4 \sin \mu z + A_5 \cos \mu z) + C_2 e^{-\lambda z} (A_4 \cos \mu z - A_5 \sin \mu z) + C_3 A_6 e^{-\gamma z} \right] \begin{pmatrix} \sin \alpha x \\ \cos \alpha x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta y \\ \sin \beta y \end{pmatrix} d\alpha d\beta \quad (7) \\ \tau_{yz} &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \left[C_1 e^{-\lambda z} (A_7 \sin \mu z + A_8 \cos \mu z) + C_2 e^{-\lambda z} (A_7 \cos \mu z - A_8 \sin \mu z) + C_3 A_9 e^{-\gamma z} \right] \begin{pmatrix} \cos \alpha x \\ \sin \alpha x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \beta y \\ \cos \beta y \end{pmatrix} d\alpha d\beta \end{aligned}$$

半無限弾性体の表面($z=0$)に鉛直部分荷重が作用する場合についての積分定数は次式より求められる。

$$\begin{aligned} A_2 C_1 + A_1 C_2 + A_3 C_3 &= -g_{\alpha\beta} \\ A_5 C_1 + A_4 C_2 + A_6 C_3 &= 0 \\ A_8 C_1 + A_7 C_2 + A_9 C_3 &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\therefore g_{\alpha\beta} = \int_{-c}^c \int_{-d}^d g \cos \alpha \xi \cos \beta \eta d\xi d\eta = \frac{4g}{\alpha\beta} \sin \alpha C \sin \beta d$$

また、表面に平行な方向の力が作用する場合も同様である。

3. 数値計算例

図1に示す直交異方弾性体の材料定数を次のように採る²⁾。

$$C_{11}/C_{55} = 6.253, C_{12}/C_{55} = 1.458, C_{13}/C_{55} = 0.067, C_{22}/C_{55} = 3.396, C_{33}/C_{55} = 3.315, C_{23}/C_{55} = 0.615, C_{44}/C_{55} = 1.644, C_{66}/C_{55} = 1.669$$

図2および図3は、深さ方向の σ_x および σ_y の応力状態を示している。

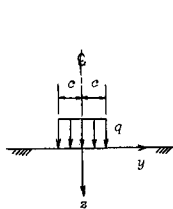


図1

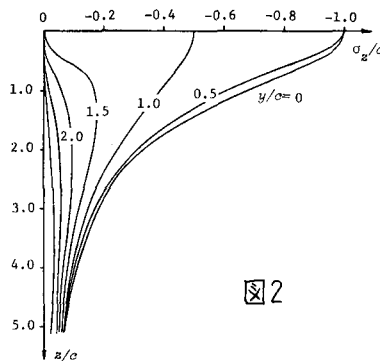


図2

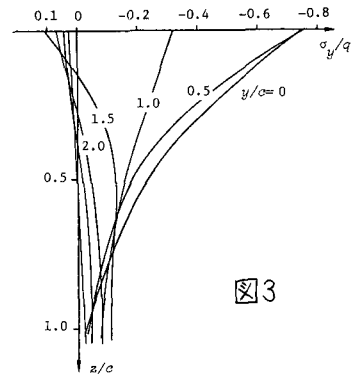


図3

4. あとがき 等方弾性体と同様、 σ_x の深さ方向の減衰する割合は σ_y に比して緩慢であることが分る。

- 1) Sonoda, K. and Horikawa, T., Displacement functions for an orthotropic elastic body and their applications thick plate problems, Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 29, 1981.
- 2) Srinivas, R. and Rao, A. K., Bending, vibration and buckling of simply supported thick orthotropic rectangular plate and laminates, Int. Jour. of Solid and Struc. Vol. 6, 1970.