

名古屋工業大学 正員 後藤 芳顯
 東京大学 正員 長谷川 彰夫
 東京大学 正員 西野 文雄

1. まえがき: 骨組の有限変位解析における剛体変位除去の手法は、極端に大きな変位まで扱う実用的な手法であるが、その理論的根拠は必ずしも十分に明らかにされていない。筆者らは、等断面の直線材から成る構造に関して、すでに、剛体変位除去の手法の解と、Lagrange 流の理論的な定式化で得られる基本式の解との関係を理論的に明らかにした。しかし、剛体変位除去の手法がさらに有効であるのは、アーチなどの任意軸線形状や変断面の部材から成る構造、ならびに区分的な変断面部材として扱う耐荷力の解析など、部材自体の特性から、数値計算上、有限要素への細分割に強えられる場合である。このときには、すでに細分割された要素を剛体変位除去に利用できるの、効率的な計算が可能となる。以上のように、任意形状の骨組の解析に対して、剛体変位除去の手法は、実用上、適した手法であるにもかかわらず、その解の性質については、数値上ですら、ほとんど検討されていない。ここでは、直線材に関する結果を平面骨組の一般論へ拡張する意味も含めて、任意形状の骨組に剛体変位除去の手法を適用した場合の解の精度について理論的に検討した。この場合、通常の計算では部材軸線形状自体も直線で近似されることがほとんどであるが、本検討では、今後の発展性も考慮し、より厳密である曲線要素を用いた場合についても扱う。

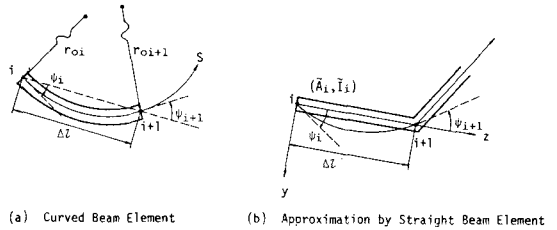


Fig.1 Beam Element in the Original State

2. 座標と物理成分: Fig.1 (a)の曲線材は、Fig.2のようにS軸を変形前の部材軸線方向に、n軸の原点と断面中立軸に選ぶ直交曲線座標(n, s)と、曲線要素を用いた剛体変位除去の手法に固有の局所座標として、節点nの剛体変位とともに移動する座標($\hat{n}$, $\hat{s}$)を用いる。また、Fig.1 (b)の直線近似では、直線材と同様に選んだ直交直線座標(y, z)と局所移動座標($\hat{y}$, $\hat{z}$)とを挙げる。部材中立軸上の変位、節点力、分布外力の(n, s)成分を(v_o, w_o, α), (F_n, F_s, M), (P_n, P_s, m), ($\hat{n}, \hat{s}$)成分を($\hat{v}_o, \hat{w}_o, \hat{\alpha}$), ($\hat{F}_n, \hat{F}_s, \hat{M}$), ($\hat{P}_n, \hat{P}_s, \hat{m}$), 直線近似の($\hat{y}, \hat{z}$)成分を($\hat{D}_y, \hat{D}_z, \hat{\theta}$), ($\hat{F}_y, \hat{F}_z, \hat{M}$), ($\hat{P}_y, \hat{P}_z, \hat{m}$)と表わすと、相互の変換関係はつぎのようになる。

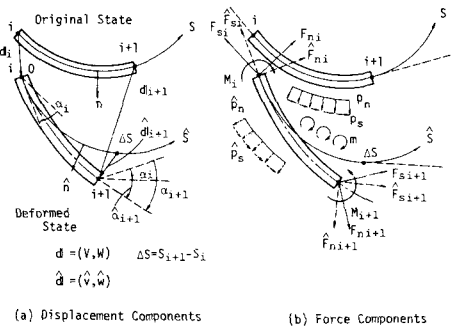


Fig.2 Coordinate Systems of a Curved Beam Element

$$\cdot \text{変位} \begin{cases} \mathbf{D}_{i+1} = [\mathbf{T}(\varphi_{i+1} - \varphi_i)] \mathbf{D}_i - [\mathbf{T}(\varphi_{i+1})] \mathbf{L} + [\mathbf{T}(\alpha_i)] \hat{\mathbf{D}}_{i+1} \\ \mathbf{D}_{i+1} = [\mathbf{T}(\varphi_{i+1} - \varphi_i)] \mathbf{D}_i - [\mathbf{T}(\varphi_{i+1})][[\mathbf{E}] - \mathbf{T}(\alpha_i)] \mathbf{L} + [\mathbf{T}(\varphi_{i+1})][\mathbf{T}(\alpha_i)] \hat{\mathbf{D}}_{i+1} \end{cases} \quad (1a, b)$$

$$\cdot \text{節点力} \begin{cases} \mathbf{F} = [\mathbf{t}(\alpha_i)] \hat{\mathbf{F}} \\ \mathbf{F}_a = [\mathbf{t}(\varphi_a)][\mathbf{t}(\alpha_i)] \hat{\mathbf{F}}_a \quad (a=i, i+1) \end{cases} \quad (2a, b) \quad \cdot \text{分布外力} \begin{cases} \mathbf{P} = [\mathbf{T}(\alpha_i)] \hat{\mathbf{P}} \\ \mathbf{P} = [\mathbf{T}(\alpha_i)] \hat{\mathbf{P}} \end{cases} \quad (3a, b)$$

$$\mathbf{D} = (v_o, w_o, \alpha), \quad \hat{\mathbf{D}} = (\hat{v}_o, \hat{w}_o, \hat{\alpha}), \quad \hat{\mathbf{D}} = (\hat{D}_y, \hat{D}_z, \hat{\theta}) \quad (4a, c) \quad \mathbf{L} = (0, \Delta L, 0) \quad (5)$$

$$\mathbf{F} = (F_n, F_s), \quad \hat{\mathbf{F}} = (\hat{F}_n, \hat{F}_s), \quad \hat{\mathbf{F}} = (\hat{F}_y, \hat{F}_z) \quad (6a, c) \quad \mathbf{P} = (P_n, P_s, m), \quad \hat{\mathbf{P}} = (\hat{P}_n, \hat{P}_s, \hat{m}),$$

$$\hat{\mathbf{P}} = (\hat{P}_y, \hat{P}_z, \hat{m}) \quad (7a, c) \quad [\mathbf{T}(\alpha)] = \begin{bmatrix} \mathbf{t}(\alpha) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8) \quad \mathbf{t}(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (9)$$

ここに、 $\hat{\alpha} = d\hat{v}_o/ds - w_o/r_o$, $\hat{\theta} = d\hat{D}_y/dz$, また、式(3b)の関係では、直線近似における分布荷重の

(θ, λ)成分が、曲線材の分布荷重の(n, s)成分にそのまま等しいとする通常モデル化($P_q(\hat{x}), P_x(\hat{x}), m(\hat{x})$)
 $= (P_n(\lambda\hat{x}), P_s(\lambda\hat{x}), m(\lambda\hat{x}))$, $\lambda = (S_{i+1} - S_i) / \Delta l$ に従った。

3. 基本式と節点物理量の関係式:

Table.1 Direct Lagrangian Expressions

基準となる変位の大きさに制限のない Lagrange 表現の基本式としては、Table 1のa)有限ひずみ・有限変位の式、b)微小ひずみ・有限変位の式を扱う。剛体変位除去後の変位成分に

Theories	Equilibrium Equations	F_n, F_s	Stress Resultant vs. Displacements
a) Finite Strains with Finite Displacements	$F_n - \frac{1}{r_0} F_s + p_n = 0$ $F_s + \frac{1}{r_0} F_n + p_s = 0$	$F_n = N \sin \alpha + \frac{(M' - m)}{\sqrt{g_0}} \cos \alpha$ $F_s = N \cos \alpha - \frac{(M' - m)}{\sqrt{g_0}} \sin \alpha$	$N = E \tilde{A} (\sqrt{g_0} - 1)$ $M = -E \tilde{I} \alpha'$
b) Small Strains with Finite Displacements		$F_n = N \sin \alpha + (M' - m) \cos \alpha$ $F_s = N \cos \alpha - (M' - m) \sin \alpha$	$N = E \tilde{A} (\sqrt{g_0} - 1)$ $M = -E \tilde{I} \alpha'$

Remarks: The following notations are used throughout Tables. E = Young's Modulus,

$$\tilde{A} = \int_A \frac{r_0}{r} dA, \tilde{I} = \int_A \frac{r_0}{r} n^2 dA \quad (A = \text{Cross Sectional Area, } r = \text{Radius of Axial Curvature at } (n, s) \text{ before Deformation}), N = \text{Axial Stress Resultant,}$$

$$g_0 = (v_0 - w_0/r_0)^2 + (1 + v_0/r_0 + w_0)^2, ' = d/ds$$

関する有限要素区間の基本式は、曲線要素については、直線材に対応する Table 2 の c) はり・柱の式、d) 微小変位の式を用いた場合を、また、直線近似については、直線材に

Table.2 Expressions for Curved Element with Separation of Rigid Body Displacements

おける同様の式 e), f) を用いた場合を扱う。なお直線近似のときの直線要素の断面定数は、節点での曲線材の値 $\tilde{A}_i, \tilde{I}_i$ を用い、直線区間は等断面とする。

Theories	Equilibrium Equations	$\hat{F}_n, \hat{F}_s$	Stress Resultant vs. Displacements
c) Beam-Column	$\hat{F}_n - \frac{1}{r_0} \hat{F}_s + \hat{p}_n = 0$	$\hat{F}_n = N(\hat{v}_0' - \frac{\hat{w}_0}{r_0}) + M' - m$ $\hat{F}_s = N$	$N = E \tilde{A} (\hat{w}_0' + \frac{\hat{v}_0}{r_0} + \frac{1}{2} (\hat{v}_0' - \frac{\hat{w}_0}{r_0})^2)$ $M = -E \tilde{I} (\hat{v}_0' - \frac{\hat{w}_0}{r_0})$
d) Small Displacements	$\hat{F}_n + \frac{1}{r_0} \hat{F}_s + \hat{p}_s = 0$	$\hat{F}_n = M' - m$ $\hat{F}_s = N$	$N = E \tilde{A} (\hat{w}_0' + \frac{\hat{v}_0}{r_0})$ $M = -E \tilde{I} (\hat{v}_0' - \frac{\hat{w}_0}{r_0})$

各手法の解の性質は、等断面

の直線材の場合と同様に、有限要素両端の物理量の(n, s)成分の関係式と要素軸線長 ΔS に関するべき級数表現で求め、係数を互いに比較することにより調べた。このとき、直線近似の場合の展開変数であるとともに、式(1)の変換式中に含まれる Δl , 変換式中の y_i, y_{i+1} は、 ΔS の関数となるので、 ΔS の展開式で表現する必要がある。

4. 剛体変位除去の手法の解の性質: 要素長 ΔS を小さくし

Table.3 Coincidence of the Order of Derivatives for Small Strains with Finite Displacements

ていった場合の剛体変位除去の手法の収束解は、べき級数の ΔS の1次の係数の比較から、曲線要素、直線近似いずれの場合も、直線材と同様に、Lagrange 表現の b) 微小ひずみ・有限変位の式の解に対応することがわかる。また、a) 有限ひずみ・有限変位の式と一致するためには、モーメントを含む局所系のつり合い式に軸線の伸張の影響を考慮する必要がある。

Theories		F_n	F_s	M	v_0	w_0	α
With Separation of Rigid Body Displacements	Curved Beam Elements						
	c) Beam-Column	∞	∞	2	1 [3]	1 [3]	3
	d) Small Displacements	∞	∞	1	1 [2]	1 [2]	2
	Straight Beam Elements						
	e) Beam-Column	2	2	2	1 [2]	1 [2]	1 (2)
	f) Small Displacements	2	2	1	1 [2]	1 [2]	1 (2)

∞ : All the Derivatives coincide [] : For Inextensional Axis () : For Constant Cross Sectional Values

剛体変位除去の手法の Lagrange 表現の微小ひずみ・有限変位の式の解に対する近似度は、各物理量のべき級数展開式における係数の一致の程度により知ることができる。一致する最高次数を各物理量について示せば Table 3 のようになる。これより曲線要素を用いた場合には直線材と全く

同様の一致性状を示し、一般の場合は、すべて1次の近似解法、軸線が不伸張で、c) はり・柱の式を用いた場合は2次の近似解法となる。この一致性状より、c) の式が、局所系における直線材のはり・柱の式とほぼ一般的に表現したものであることも確認される。つぎに、直線近似の場合は、曲線要素の場合より一致の程度は悪いが、軸線が不伸張で断面定数が一定のときには、e) はり・柱の式を用いると2次の近似解となる。また分布荷重が要素内で一様分布する場合には、 F_n, F_s のべき級数係数はすべて Lagrange 表現の解と一致し、近似度が向上する。

参考文献: 1) 後藤, 長谷川, 西野: 平面骨組の有限変位解析の精度に関する一考察, 土木学会論文報告集, No