I-10　奥行き方向の断面の変形を考慮したはりの高次近似理論

山梨大学工学部　正員　平島 健一
福島工業高等専門学校　正員　○根岸 嘉和

1 緒 言

はり理論は一般に，奥行き方向の成分を無視した平面問題を基本として扱われており，はりの中立軸を含む鉛直面内における高次の成分を考慮した Gupta & Pathak の理論[1]や，Wang & Dickson の理論[2]でも，前者が平面ひずみ問題，後者が平面応力問題としてはりを扱っている。また，これらからさかのぼると Timoshenko の理論[3]を初め多くの理論が，平面応力の構成関係式において，さらにはりの高さ方向の直応力を零とおくことによって，直応力に関しては古典はり理論と同様1軸応力状態の構成関係とし，これを用いた定式化を行っている。しかし現実の矩形断面はりなどにおける奥行き方向の幅は，その高さに比してほぼ同程度のオーダーの値であるものも少なくなく，このような場合のはりの解析理論の高精度化を図るためには，はりの高さ方向の高次成分とともに奥行き方向の成分も考慮する必要があると思われる。　本報告では，一般的異方性体よりなるはりを対象として，変位成分をはりの高さ方向ならびに奥行き方向への各種の2重無限級数（ここではべき級数の場合についてのみ示す）に展開した形で仮定することから出発し，奥行き方向の成分を考慮した一般化高次はり理論を定式化し，従来提案されているはりの理論との関係について検討する。

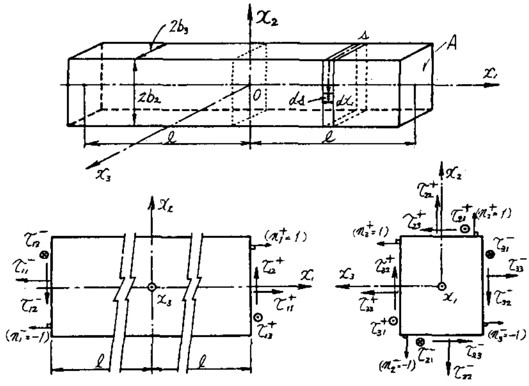

Fig. 1　座標系とはりの形状および表面力

2 理論式の誘導

Fig. 1に示すはりにおける変位 u_j を座標 x_2 および x_3 に関してべき級数展開する（$j=1,2,3$）

$$u_j(x_1,x_2,x_3,t)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}x_2^m x_3^n u_j^{(m,n)}(x_1,t) \quad \cdots\cdots(1)$$

この変位を線形弾性論の基礎式に代入し，一般化変分原理の式を用いて整理すると，次に示すはりの応力に関する1次元化された運動方程式と境界条件式を得る

$$\tau_{1j,1}^{(m,n)}-m\tau_{2j}^{(m-1,n)}-n\tau_{3j}^{(m,n-1)}+F_j^{(m,n)}+f_j^{(m,n)}=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\rho^{(m+p,n+q)}\ddot{u}_j^{(p,q)}$$

$$(m=0,1,2\cdots,\ n=0,1,2\cdots)\quad\cdots\cdots(2)$$

$$\overset{*}{T}^{(m,n)}=\tau_{1j}^{(m,n)}\quad \text{or}\quad \bar{u}_j^{(m,n)}=u_j^{(m,n)}\quad \text{at } x_1=\pm l \quad\cdots\cdots(3)$$

ここに

$$\left.\begin{aligned}&\tau_{ij}^{(m,n)}=\int_A \tau_{ij}x_2^m x_3^n dA\ ;\ F_j^{(m,n)}=\oint_s n_\alpha \tau_{\alpha j}x_2^m x_3^n ds\quad(\alpha=2,3)\\&f_j^{(m,n)}=\int_A f_j x_2^m x_3^n dA\ ;\ \overset{*}{T}^{(m,n)}=\left[\tau_{1j}^{(m,n)}\right]_{-l}^{l}\ ;\ \rho^{(m+p,n+q)}=\int_A \rho x_2^{m+p}x_3^{n+q}dA\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(4)$$

なお f_j は物体力ベクトル，ρ は密度を表わす

また，これらの式においてラテン添字は1,2,3を，ギリシャ添字は2,3をとるものとし以下の式でも同様に用いる。

ここで，一般化 Hooke の法則によって一般的な異方性体の構成関係式を与えれば，応力の (m,n) 次モーメントは次式のように表わされる。

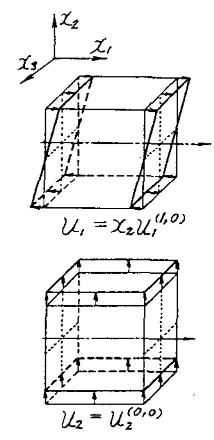

Fig. 2　低次の変位係数の変形モード

$$
\left.
\begin{aligned}
\tau_{ij}^{(m,n)} &= \int_A x_2^m x_3^n C_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}\,dA \\
&= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\left\{ C_{ij1l}^{(m+p,n+q)} u_{l,1}^{(p,q)} + (p+1) C_{ij2l}^{(m+p,n+q)} u_l^{(p+1,q)} + (q+1) C_{ij3l}^{(m+p,n+q)} u_l^{(p,q+1)} \right\} \\
\text{ここに}\quad C_{ijkl}^{(m+p,n+q)} &= \int_A x_2^{m+p} x_3^{n+q} C_{ijkl}\,dA
\end{aligned}
\right\} \quad \cdots\cdots (5)
$$

上式を用いて (2) の運動方程式を変位で表現することにより，変位係数 $u_j^{(m,n)}$ に関する一般的なはりの1次化理論の支配運動方程式が次式のように得られる．

$$
\begin{aligned}
\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} \Big[& C_{ij1l}^{(m+p,n+q)} u_{l,11}^{(p,q)} + \left\{ \left(p C_{ij2l}^{(m+p-1,n+q)} - m C_{2j1l}^{(m+p-1,n+q)}\right) u_{l,1}^{(p,q)} - p\left(m C_{2j2l}^{(m+p-2,n+q)} + n C_{3j2l}^{(m+p-1,n+q-1)}\right) u_l^{(p,q)} \right\} \\
& + \left\{ \left(q C_{ij3l}^{(m+p,n+q-1)} - n C_{3j1l}^{(m+p,n+q-1)}\right) u_{l,1}^{(p,q)} - q\left(m C_{2j3l}^{(m+p-1,n+q-1)} + n C_{3j3l}^{(m+p,n+q-2)}\right) u_l^{(p,q)} \right\} \Big] + F_j^{(m,n)} + f_j^{(m,n)} \\
&= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} \rho^{(m+p,n+q)} \ddot{u}_j^{(p,q)} \quad \cdots\cdots (6)
\end{aligned}
$$

3 他のはり理論との関係

等方性はりの問題に限定し，本理論で低次の幾つかの変位係数（Fig. 2 参照）を採用した場合を他のはり理論と比較する．まず，変位係数 $u_1^{(1,0)}, u_2^{(0,0)}, u_3^{(1,1)}, u_3^{(1,3)}$ を採用し $u_3^{(1,1)}=-3b_3^2 u_3^{(1,3)}$ なる付帯条件をつけたものは，Barr 理論[4]と同レベルの式となる．また $u_1^{(1,0)}, u_2^{(0,0)}, u_2^{(2,0)}, u_2^{(0,2)}, u_3^{(1,1)}$ を $u_3^{(1,1)}=-2u_2^{(2,0)}=2u_2^{(0,2)}=\nu u_{1,1}^{(1,0)}$ なる付帯条件のもとに採用すればBoley 理論[5]と同レベルの式が得られる．一方，$u_1^{(1,0)}, u_2^{(0,0)}$ のみを採用すればTimoshenko 理論[3]のレベルの式が得られ，ここにおいて $u_1^{(1,0)}=-u_2^{(0,0)}$ の条件を付加すれば Rayleigh の理論[6]，さらにこの式で回転慣性の項を無視すれば，古典はり理論のレベルと同等の式となる．但し，これらのうち前3者のはり理論で，せん断補正係数が導入されている点，また各理論とも前述したような構成関係式における特殊化がなされている点に本理論との差異がみられる．最後に，変位係数として $u_1^{(1,0)}, u_1^{(3,0)}, u_2^{(0,0)}, u_2^{(2,0)}$ を独立に採用し慣性項をすべて無視した静的問題の支配式を作れば，Gupta & Pathak 理論に一致する．

4 数値計算例

単純ばりの固有振動数スペクトルを各種はり理論で計算し比較したものをFig.3 に示す．なお図中 G.H.Ⅲ は本理論において $u_1^{(1,0)}, u_2^{(0,0)}, u_3^{(1,1)}$ を採用した場合であり G.H.Ⅶ は，$u_1^{(1,0)}, u_1^{(3,0)}, u_2^{(0,0)}, u_2^{(2,0)}, u_2^{(0,2)}, u_3^{(1,1)}, u_3^{(1,3)}$ を採用した場合である．

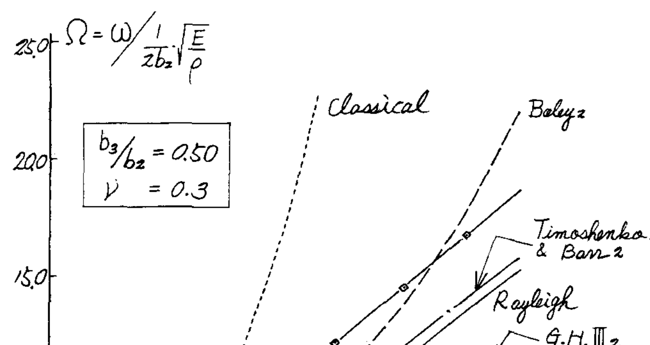

Fig. 3　各種理論による矩形断面単純ばりの固有振動数スペクトル

〔参考文献〕 1) Gupta, A.P. & Pathak, N.; Indian J. pure appl. Math., 9(1978), pp.358～370. 2) Wang, J.T.S. & Dickson, J.N.; AIAA J., 17(1979), pp.535～537. 3) Timoshenko, S.P.; Phil. Mag., 41(1921), pp.744～746, and 43(1922), pp.125～131. 4) Barr, A.D.S.; Proc. 9th. Int. Congr. Appl. Mech. 7(1956), pp.448-458 5) Boley, B.A.; J. Appl. Mech., (1955), pp.69～76. 6) Rayleigh, L.; "Theory of Sound" Dover, (1960)