

電力中央研究所 正員 中村秀治

電力中央研究所 松井正一

1. まえがき

数式処理システムは、「数式を記号のまま計算機で処理できるシステム」である。1950年代から種々の研究、開発が進められ、広く利用者の役に立っているシステムだけで、現在10種類近く存在する。しかし、特殊な言語を使用すること、マニュアルの不備などから、一般ユーザーにとって必ずしも使い易い形に整備されているとは言えず、特定の分野を除いて殆ど普及していない。¹⁾ 構造解析への応用についても検討され、いくつかの論文が発表されているが、^{2)~4)} 使い勝手の悪さを克服してまで広く数式処理システムを実用化する利点は、いまだ見出されていないようである。また、特殊言語で得られた結果を自動的にFORTRANへ変換する機能が十分でない場合も多く、実際問題への適用例は皆無に近い。本文は、数式処理システムの一つとして知られるREDUCE2を用い、2次元4節点のアイソパラメトリック要素の剛性マトリックスを数式で求め、従来の数値積分によるものと計算時間、精度など比較して、数式処理システムの有効性について検討するものである。

2. 数式処理システムを適用することの利点

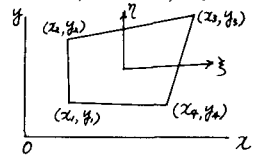
個々の数式処理システムは、各々の特性を有しているので、構造解析への適用の利点を断定的に述べることはできない。ここでは、REDUCE2に基づいてその利点を挙げることにする。

- i) 多項式の数式処理については、マトリックスの場合まで含めて殆ど問題なく行なえるので(微分演算は自由に行なえるが、積分演算には制約があり、独自にプログラムを作成、追加するなどの必要が生じる)、一般に方程式の解が多項式で近似し、ガラーキン法で理論式を誘導したり、解を求める場合有効である。
- ii) 有限要素法については、質量、剛性マトリックスの数式表示が自動的に行なえる。特に、アイソパラメトリック要素については、従来、数値積分によってのみ質量、剛性マトリックスが求められていたが、数式処理システムの適用により数式表示の可能性が生じてきた。
- iii) アイソパラメトリック要素では、数値積分に多くのCPU Timeを費し、数値積分の点数が問題になるが、数式処理システムによる結果からその精度判定が行なえる。また、数式処理結果から剛性マトリックスを得る方が数値積分による場合より速くなる。
- iv) 数式処理結果が直ちにFORTRANに変換され、有限要素解析プログラムの中にサブルーチンで組み込める。

3. 2次元(平面ひずみ)、4節点アイソパラメトリック要素への適用

剛性マトリックスは、周知の通り、

$$[K] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [P]^T \begin{bmatrix} [J]^T & 0 \\ 0 & [J]^T \end{bmatrix} [T]^T [D] [T] \begin{bmatrix} [J] & 0 \\ 0 & [J] \end{bmatrix} [P] d\xi d\eta$$



である。ここで、

$$[P] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}(1-\eta) & 0 & -\frac{1}{4}(1+\eta) & 0 & \frac{1}{4}(1+\eta) & 0 & \frac{1}{4}(1-\eta) & 0 \\ -\frac{1}{4}(1-\xi) & 0 & \frac{1}{4}(1-\xi) & 0 & \frac{1}{4}(1+\xi) & 0 & -\frac{1}{4}(1+\xi) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4}(1-\eta) & 0 & -\frac{1}{4}(1+\eta) & \frac{1}{4}(1+\eta) & 0 & \frac{1}{4}(1-\eta) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4}(1-\xi) & 0 & \frac{1}{4}(1-\xi) & \frac{1}{4}(1+\xi) & 0 & -\frac{1}{4}(1+\xi) & 0 \end{bmatrix}$$

$$[J] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}(1-\eta) & -\frac{1}{4}(1+\eta) & \frac{1}{4}(1+\eta) & \frac{1}{4}(1-\eta) \\ -\frac{1}{4}(1-\xi) & \frac{1}{4}(1-\xi) & \frac{1}{4}(1+\xi) & -\frac{1}{4}(1+\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix}, [T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, [D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}$$

E: ヤング率, ν : ポアソン比

REDUCE2によれば、被積分関数のマトリックス成分を数式で自動的に求め、簡単なプログラムにより、その不定積分が求まるので、積分の上、下限と節点座標を代入するだけで[た]が求められる。

4. PC 圧力容器への適用例

図-1の原子力発電所PCPVに内圧(10気圧)をかけた場合の計算例を示す。用いた材料定数は以下の通り。

PCPVのコンクリート：ヤング率 $3 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ 、ポアソン比 0.2

基礎コンクリート：ヤング率 $2.1 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ 、ポアソン比 0.2

岩盤：ヤング率 $1 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$ 、ポアソン比 0.2

要素分割は図-2の通りである。数値積分は、3, 7方向に $n=2, 3, 4$ 点取って行なうものとし、一要素の剛性マトリックスの計算に要したCPU Timeを示すと表-1のようになる(FACOM, M-200を用いた)。

数値積分の場合、 $n=2$ で6 m. sec.で、数式処理の4 m. sec.と大差

無いが、 $n=4$ の16 m. sec.にもなると数式処理との差は無視できなくなる。要素形状がかなりゆがんだ場合、 $n=2$ では精度上十分であり、 $n=3$ あるいは4として、数100、数1000要素の計算を行えば、数式処理との差がかなり大きくなる。図-3, 4は変形図であり、表-2は図-2中の点1~5における応力値である。両者は極めて良く一致している。

5. おまけ

以上、数式処理システムの構造解析への適用について検討し、判点を挙げ、計算例を示したが、必ずしも有効と言いつける点についても数多く気付いた。その一つは有理式の場合の処理の難かしさである。また、ただREDUCE2の結果を自動的に他のFORTRANプログラムに組み込むのでは式の形に無駄が多く、桁落ちの生じ易い場合が多くなる。

従って、どうしても若干の手直しが必要になる。現段階においては、通常の数値計算法と数式処理の判点を考えつつ、適切に両者を併用していくことが重要であろう。なお、ここには示していないが、REDUCE2で求めた剛性マトリックスの数式表示、他の計算例など、当日OHPで示す予定である。

参考文献

- (1) 金田康正：使ってみない？数式処理システムを、bit, Vol. 13, No. 4, 1981
- (2) 金田康正：HLISP-REDUCE使用の手引1~5、東京大学大型計算機センターニュース、Vol. 14, No. 3~7, 1982
- (3) 武田 洋：パーソナルコンピュータによる数式処理システムの有限要素解析への応用、第125回構造解析小委員会資料、日本鋼構造協会
- (4) Luft, R.W., Roesset, J.M. and Connor, J.J. : Automatic Generation of Finite Element Matrices, Proc. of ASCE, ST1, Jan., 1971
- (5) Noor, A.K. and Andersen, C.M. : Computerized Symbolic Manipulation in Structural Mechanics - Progress and Potential, Computers and Structures, Vol. 10, 1979

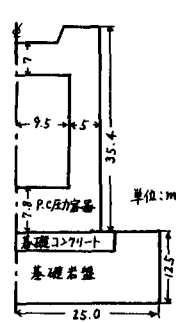


図-1 PCPVの計算モデル

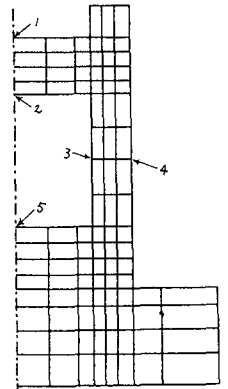


図-2 要素分割図

	CPU Time (m. sec.)
数式処理	4
数値積分	
$n=2$	6
$n=3$	10
$n=4$	16

表-1 一要素の剛性マトリックスを求めるのに要する時間

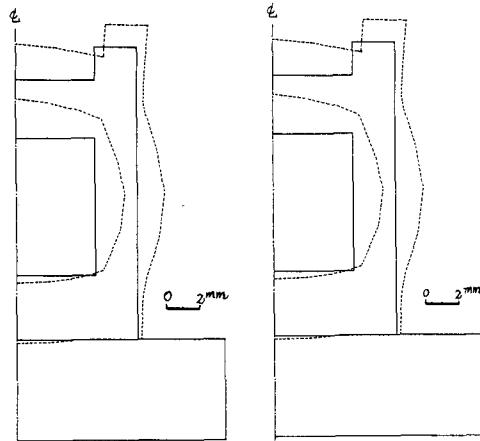


図-3 変形図(数式処理) 図-4 変形図(数値積分 $n=2$)

節点番号	数式処理	数値積分
1	σ_r 28.9	28.9
	σ_θ -0.4	-0.4
	σ_z -5.2	-5.2
2	σ_r -10.7	-10.7
	σ_θ -7.7	-7.7
	σ_z -5.8	-5.8
3	σ_r -1.3	-1.3
	σ_θ 40.9	40.9
	σ_z 0.2	0.2
4	σ_r -10.3	-10.3
	σ_θ -7.7	-7.7
	σ_z -5.8	-5.8
5	σ_r 28.9	28.9
	σ_θ -0.4	-0.4
	σ_z -5.2	-5.2

(単位: kg/cm^2)

表-2 主要な節点における応力値
(数値積分は $n=2$)