

京大 工 正 西村 直志
京大 工 正 小林 昭一

1 序

筆者らは、以前に積分方程式法による弾塑性解析に関する研究を發表し[1]、その応用として面内クラック問題の二重層ポテンシャルと微分した物体ポテンシャルによる解表示を用いた数値解析を試みた。しかし、ここではクラックティップの塑性ひずみ速度の特異性を考慮しておらず、必然的に得られた解も十分な精度を有しているとは言えなかった。本報では、この種の問題を再考するに先立ち、より簡単な面外クラック問題を採上げ、解の特異性を近似的に表現し得る数値解析法を考える。なお、クラックを扱った他の研究としてMorjariaらのもの[2]があるが、彼らの言うクラックとは偏平な楕円であるのに対し、ここでは真のクラックを取扱う。

2 定式化

簡単のために、無限領域 R 内にある単一クラック S を考える(図1)。物体がMisesの降伏条件に従う完全弾塑性体のとき、次の関係が成立つ[3]:

1: 面外変位 $w(x_1, x_2)$ は弾性域 D^e 、及び S 上で

$$\Delta w = 0 \quad \text{in } D^e, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad \text{on } S \quad (1)$$

を満たす。ここに添字 $(-)$ は支線 m に関して正(負)方向からの極限値を表す。

2: 塑性域での w は θ (図1)のみの関数であつて、関係

$$\frac{\partial w}{\partial \theta} = r_y R(\theta) \quad (2)$$

を満たす。ここに $r_y = \tau_y / \mu$ 、(τ_y : 降伏剪断力, μ : 剛性率)、また R は図1に示す通りである。

3: 塑性域での応力 $\underline{\tau} = \tau_{31} \underline{i}_1 + \tau_{32} \underline{i}_2$ 、及び弾塑性境界 ∂D^p 上の表面力 $\underline{t} = \underline{n} \cdot \underline{\tau}$ は各々

$$\underline{\tau} = \tau_y (-\underline{i}_1 \sin \theta + \underline{i}_2 \cos \theta) \quad \text{in } D^p, \quad \underline{t} = -\frac{\tau_y R'}{\sqrt{(R')^2 + R^2}} \quad \text{on } \partial D^p \quad (3)$$

を満たす。ただし用いた座標はティップを原点とし、 x_2 軸と S が原点で接する様なものとする。

本報では $\underline{t}$ に於ける変位 w を二重層ポテンシャルを用いて

$$w(x) = w_0(x) + \int_S \frac{\partial G}{\partial n_y}(x, y) \varphi(y) dS_y + \int_{\partial D^p} \frac{\partial G}{\partial n_y}(x, y) \psi(y) dS_y \quad (4)$$

と表示す。ここに w_0 は $\Delta w_0 = 0$ を満たすfar field, G はLaplace方程式の基本解

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{|x - y|}$$

φ, ψ は各々適当な二重層密度である。この問題では φ, ψ 及び ∂D^p の位置が未知である。

3 可解性、解の不定性等について

まず式④の表示が適当かどうか考えねばならない。以下ではある仮定した ∂D^p の位置について、式①、②を満足する解を求める操作を繰返すので、その様な問題の解(Laplace方程式の解の意)の存在は認め、その解が

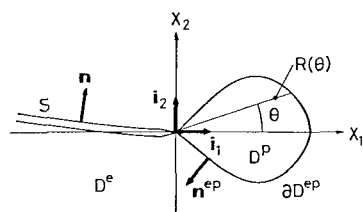


図 1

式④の表示を有する事を見る。実際、そのためには式③₂の表面力が ∂D^p 上で積分して0になる事

$$\int_{\partial D^p} \frac{R'}{V(R^2 + R'^2)} dS = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R' d\theta = 0$$

に注意すればよい。なお、同時に、 ψ がテッパ (x_I) にて

$$\psi^+ - \psi^- = \varphi \text{ at } x_I$$

なる関係を満たさねばならない事もわかる(図2)。

Fredholm's対応を考えれば解の不定性が予想される。実際、式④の表示が2つの $\psi_i, \psi_i (i=1,2)$ について成立てば、

$$\psi_1 = \psi_2 \text{ on } S, \quad \psi_1 - \psi_2 = \text{const} \text{ on } \partial D^p$$

(const は tip ごとに異なってもよい)

でなければならない。従って、特に次の様にして ψ の不定性を除いてもよい。

$$\psi^+ = \varphi, \quad \psi^- = 0 \text{ at } x_I \quad (5)$$

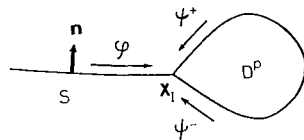


図 2

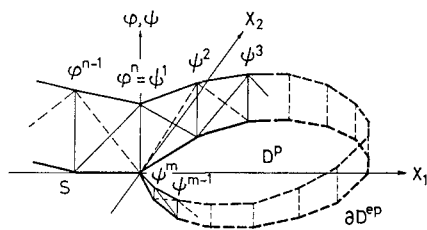


図 3

4 数値解析法、及び数値例

以下ではRの方法を用いて数値計算を行った。

1) 適当に ∂D^p の初期形状を仮定する。2) 与えられた ∂D^p に対し式③₂右辺の量を計算し、式①₂、③₂及び④から得られる積分方程式を解く。積分方程式は有限部分の意味での積分を含むものとなる。解 φ, ψ を式④に代入して ∂D^p 上の w を求める。もちろん極限計算を要する。3) 式④からRを計算し直す。具体的には

$$R_{\text{new}} = R_{\text{old}} + \rho \left(\frac{1}{r_j} \frac{\partial w}{\partial \theta} - R_{\text{old}} \right) \quad (0 < \rho \leq 1) \quad (6)$$

とする。rhoは係数である。4) Rの収束判定を行う。収束してあれば計算を打ち切り、そうでなければ2)へ戻る。

数値例として長さ2lの直線クラックの、無限遠方で一様な崩断 τ_y の下での変形を解析する。本報では数値解析法として8分線形アイソパラメトリック要素を用い、積分方程式はGalerkin法で解いた。この様な近似では、節点に於いて ∂w がlog tの特異性を有するが、Galerkin法の利用によって数値的に安定する。なお式⑤を考慮して未知量は図3の $\dots \psi^{n-1}, \psi^n (= \psi^1), \psi^2, \dots, \psi^m$ とした。また ∂D^p のモデル化に当っては節点の配置をthetaについて等間隔に行い、式④、⑥の微分は中央差分を求めた。また $\rho = 0.3$ とした。

図4は求めた塑性域形状とHull & McClintockの解[4]と比較したもので、よく一致している。

文献

[1] 小林, 西村, 土木学会論文報告集304, 1980.

[2] Morjaria, M. & Mukerjee, S., Int. J. Solids Structures, 17, 1981.

[3] Rice, J.R., Fracture II (ed. H. Liebowitz) Acad. Pr., 1968.

[4] Hull, J. A. & McClintock, F. A., Proc. 9th Int. Congr. Appl. Mech. 8, 1956.

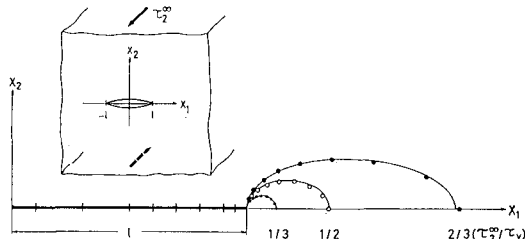


図 4 (記号: 積分方程式, 線: 正解)