I-6　積分方程式法による特異性を有する境界値問題の解析

京都大学工学部　学生員　○川上　隆
京都大学工学部　正　員　　小林昭一

1、はじめに

本論文は、積分方程式法を用いて特異性を有する境界値問題を解析する場合の数値解の精度向上を図るものである。本解析では、波動方程式の定常問題(Helmholtz方程式)を対象として、混合境界及び角のある境界について前者は、グリーン公式、後者は、ポテンシャル理論を用いて積分方程式を定式化したものである。

2、角のある境界値問題

一般に応力境界値問題に対して1重層ポテンシャルを用いた積分方程式は、次のようになる[2)]。

$$\frac{\partial u(\underset{\sim}{x})}{\partial n_{\underset{\sim}{x}}} = \frac{1}{2}\varphi(\underset{\sim}{x}) + \int_S \frac{\partial \Gamma(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{y})}{\partial n_{\underset{\sim}{x}}}\varphi(\underset{\sim}{y})\,dS_{\underset{\sim}{y}} \quad (2\text{-}1) \quad \left(\Gamma(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{y})=\frac{i}{4}H_0^1(k|\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{y}|)\right)$$

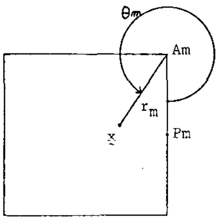

fig.1

x, y は位置ベクトル, $\frac{\partial}{\partial n_x}$ は x における法線微分, φ は密度関数, u は変位を示す。今、x, y が角にくると密度関数 φ が発散するために特異性が生じるのである。さて、$u(x)$ が角においても解析的であると仮定すると角 A_m 点を原点としてその近傍で、テーラー展開をすることができる(fig.1の正方形領域を考えている)。

$$u^+ = a_0 + a_{1i}x_i + a_{2ij}x_ix_j + a_{3ijk}x_ix_jx_k + \cdots \quad (2\text{-}2)$$

正解 u は、原点まわりで正則に拡張でき、かつ、1重層ポテンシャルは、連続なので、外部では、

$$u^- = a_0 + a_{1i}x_i + a_{2ij}x_ix_j + a_{3ijk}x_ix_jx_k + \cdots + A^m_{\frac{2}{3}}J_{\frac{2}{3}}(kr_m)\sin\frac{2}{3}\theta_m + A^m_{\frac{4}{3}}J_{\frac{4}{3}}(kr_m)\sin\frac{4}{3}\theta_m + \cdots \quad (2\text{-}3)$$

となる。ここに、$r_m=|x-a_m|$, a_m は A_m 点の位置ベクトルを示し、θ_m は、$\underset{\sim}{A_mA_{m-1}}$ の方向から測って反時計回りにとる。$A^m_{\frac{2}{3}}$, $A^m_{\frac{4}{3}}$, …：定数, J_n：n 次ベッセル関数である。

$$\varphi(x) = \frac{\partial u^+}{\partial n_x} - \frac{\partial u^-}{\partial n_x} \text{ であるから、} \varphi(x) = -A^m_{\frac{2}{3}}\frac{\partial}{\partial n_x}J_{\frac{2}{3}}(kr_m)\sin\frac{2}{3}\theta_m - A^m_{\frac{4}{3}}\frac{\partial}{\partial n_x}J_{\frac{4}{3}}(kr_m)\sin\frac{4}{3}\theta_m + \cdots \quad (2\text{-}4)$$

となる。(2-4)式の各項について order を考えてみると、第1項は、$r_m^{-\frac{1}{3}}$ で特異性を持つのに対して第2項以下は、$r_m^{\frac{1}{3}}$ 以上のorderであって正則である。ここで、第1項を φ_s^m, 第2項以下を φ_R^m として、$\varphi=\varphi_R^m+\varphi_s^m$ と考える。φ_R^m は $r_m\to 0$ のとき、$\varphi_R^m\to 0$ となることに注意しておく。さて、(2-1)式で x が角にないときを考えるに、この際問題となるのは、y が A_m 点近傍にくる境界要素 $P_m-A_m-Q_m$ 上の積分であるが(fig.2参照：P_m, Q_m は A_m の両隣りの要素点であって、P_m', Q_m' はそれぞれ P_mA_m, A_mQ_m の中点とする。S_A^m は、$P_m'-A_m-Q_m'$ 区間, C_A^m contour は[1)] 中心 A_m, 半径 A_mP_m' の弧円である。D_A^m は、C_A^m contour と S_A^m に囲まれる内部領域を示す)、この積分については、A_m 点の周りに $S_A^m+C_A^m$ という領域を用いて積分を行なう。

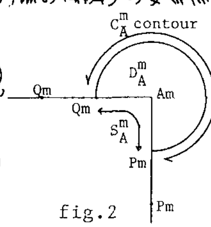

fig.2

$u_s^m = J_{\frac{2}{3}}(kr_m)\sin\frac{2}{3}\theta_m$ は、Helmholtz方程式を満たすので、グリーン公式を用いた積分方程式をたててやると次式になる。

$$F(x)u_s^m(x) = \int_{S_A^m+C_A^m}\left\{\Gamma(x,y)\frac{\partial u_s^m(y)}{\partial n_y} - u_s^m(y)\Gamma_I(x,y)\right\}dS_y \qquad \begin{cases} F(x)=0 & x\notin D_A^m+S_A^m+C_A^m \\ F(x)=\frac{1}{4} & x=\underset{\sim}{P_m'},\ \underset{\sim}{Q_m'} \end{cases} \quad (2\text{-}5)$$

u_s^m は、S_A^m 上で0となるので

$$\int_{S_A^m}\Gamma(x,y)\frac{\partial u_s^m(y)}{\partial n_y}dS_y = -\int_{C_A^m}\left\{\Gamma(x,y)\frac{\partial u_s^m(y)}{\partial n_y} - u_s^m(y)\Gamma_I(x,y)\right\}dS_y \quad (2\text{-}6) \quad \left(\Gamma_I(x,y)=\frac{\partial}{\partial n_y}\Gamma(x,y)\right)$$

今、$\varphi_s^m(y) = \frac{\partial u_s^m(y)}{\partial n_y}$ であるから、(2-6)式の両辺に $\frac{\partial}{\partial n_x}$ をかけると

$$I_m=\int_{S_A^m}\frac{\partial\Gamma(x,y)}{\partial n_x}\varphi_s^m(y)dS_y = -\int_{C_A^m}\left\{\frac{\partial\Gamma(x,y)}{\partial n_x}\frac{\partial u_s^m(y)}{\partial n_y} - u_s^m(y)\frac{\partial\Gamma_2(x,y)}{\partial n_x}\right\}dS_y \qquad (2\text{-}7)$$

となって、S_A^m上の積分をC_A^m上の積分に置き換えることができる。

次に、境界をn個に分割して離散化を図り、各要素点の密度を代表して$\varphi(y)$を線形補間する。P_m-A_m区間及びA_m-Q_m区間については、fig3のようにφ_Rとφ_Sに分けて補間し、その重なり合う部分は、それについても線形補間をして差し引く。

$$\varphi^m(y)=\varphi_R^m(\xi)+\varphi_S^m(\xi)=\frac{1-\xi}{2}\varphi_R^m(P_m)+A_m\left\{\varphi_S^m(y)-\frac{1-\xi}{2}\varphi_S^m(P_m)\right\} \qquad (2\text{-}8)$$

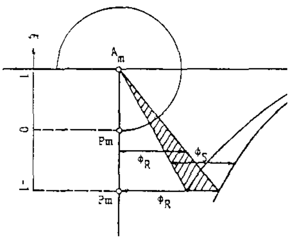

fig.3

（yがP_m-A_m区間にあるとき，A_m：未定定数，$|\xi|\le 1$）

離散化するにあたって未知数は、n個の要素点の$\varphi(y)$であるが、A_m点においては、$\varphi_R^m(a_m)=0$で既知となっている。しかしながら、$\varphi_S^m(y)$の係数A_mが未知数となって、合計n個の未知数が存在する。方程式の数としては、n個の要素点に対してたてるのであるが、A_m点においては、$\varphi_S^m(x)$が$x\to a_m$のときに発散するので(2-1)式は用いず、次式を考える。

$$\lim_{x\to a_m}\frac{\partial u(x)}{\partial n_x}=\lim_{x\to a_m}\int_{S_A^m}\frac{\partial\Gamma(x,y)}{\partial n_x}\varphi(y)dS_y \qquad (2\text{-}9)$$

このとき、左辺A_m点での法線微分は、$\frac{\partial}{\partial n_x}=\frac{\partial}{\partial r_m}$とし、$S_A^m$区間では、前述と同様に$C_A^m$ contourを用いて積分する。結局、方程式の数は、n個となって連立方程式を組むと、未知数であるn-4個の$\varphi_R(y)$と4個のA_mが求まる。よって$\varphi(y)$が定まるので、$u(x)=\int_S\Gamma(x,y)\varphi(y)dS_y$にて$u(x)$も求まることになる。解析例としては、fig4の正方形領域に、応力境界値問題を解く。解には、$u(y)=J_0(kr)$（$r=|y|$，$ka=2$）を考え、解析結果をtable1に示しておく（Aは、数値解と解析解との誤差を示す）。なお、一般の場への拡張も容易である。

table 1

elements 16

NO.	A(%)
1	0.34
2	0.25
3	0.24
4	0.25
5	0.34

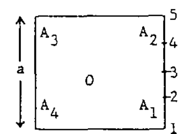

fig.4

3、混合境界値問題

対象とする問題の境界条件は、Seで変位、Sfで表面力が与えられている（fig5参照）。SeとSfの境界A_mでは、解は、一般に特異挙動を示す。今、積分方程式は、境界上で、

$$\frac{1}{2}u(x)=\int_S\left\{\Gamma(x,y)\frac{1}{\mu}t(y)-u(y)\Gamma_2(x,y)\right\}dS_y \qquad (3\text{-}1)$$

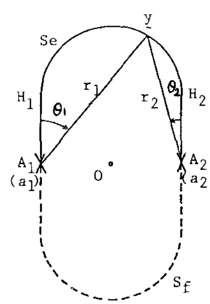

fig.5

となる。ここに、μは、弾性定数，Γ，Γ_2は、1重層及び2重層ポテンシャルの核である。この場合にも角のある問題と同様に、A_m点近傍の積分をC_A^m contourを用いて行なうことで数値解析が可能となる。解析例としては、解を次式で与え、

$$u(y)=J_0(kr)+\sum_{m=1}^{2}J_{\frac{1}{2}}(kr_m)\sin\frac{\theta_m}{2} \qquad (3\text{-}2)$$

（k：波数，$r_m=|y-a_m|$，θ_1：A_1のA_1H_1の方向から時計回りに測る，θ_2：A_2のA_2H_2の方向から反時計回りに測る，J：ベッセル関数），これに対応する数値解を検討する。詳細は、当日発表することにして解析結果をfig6，table2に示しておく（Aは、contourを用いたときの数値解と解析解との誤差，Bは用いなかったときの誤差である。1～5：表面力誤差，6～10：変位誤差，$ka=1$）。

table 2

elements 80

NO.	A(%)	B(%)
1	-0.19	-0.38
2	-0.11	-0.28
3	0.16	0.14
4	1.79	2.26
5	-1.01	50.6
6	-0.80	-4.37
7	-0.23	2.58
8	-0.13	4.77
9	-0.16	6.70
10	-0.07	7.70

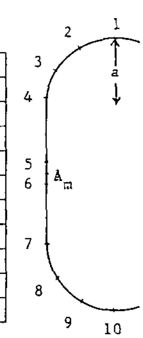

fig.6

〈参考文献〉 1) J.O.WATSON: "HERMITIAN CUBIC BOUNDARY ELEMENTS FOR PLANE PROBLEMS OF FRACTURE MECHANICS" Res Mechanica 4,(1982) 23-42

2) 福井卓雄，徳村秀二；"積分方程式法の解析精度（特異境界点付近での精度の向上について）" 土木学会 関西支部講演概要集，1982