I-5　混合型変分原理に基づいた運動方程式の解法

東京工業大学　学生員　菅野　良一
東京工業大学　正　員　吉田　裕
東京工業大学　正　員　野村　卓史

1　はじめに

先に著者らは、運動方程式の数値積分法の1つとして、運動方程式と等価な変分汎関数を与えることにより直接時間積分法を構成する方法を提案した[1)]。運動方程式と等価な変分汎関数は一意的に定まるものではなく、種々の具体化が考えられる。そこで本論文では、運動方程式を表わす本来の変数と、新たに導入される変数、の2つによって表わされる混合型の変分汎関数を構成した。オイラー方程式としては、運動方程式が直接対応するものであり、さらにその汎関数に基づいて直接時間積分法を展開したので、ここに発表する。

2　運動方程式と等価な混合型変分汎関数

問題は式(1)に示される運動方程式を、式(2)に示すような初期条件のもとで解くことである。

$$\mathbb{M}\mathbf{x}^{(2)}+\mathbb{B}\mathbf{x}^{(1)}+\mathbb{K}\mathbf{x}=\bar{\mathbf{f}}(t) \qquad (1)$$

$$\mathbf{x}|_{t=0}=\mathbf{x}_0\ ,\quad \mathbf{x}^{(1)}|_{t=0}=\mathbf{x}_0^{(1)} \qquad (2)$$

ここに、$\mathbf{x}$は変位ベクトル，$\mathbf{x}^{(k)}=d^k\mathbf{x}/dt^k$，$\mathbb{M}$，$\mathbb{B}$，$\mathbb{K}$はおのおの質量、減衰、剛性マトリックス、$\bar{\mathbf{f}}$は与えられる外力ベクトルである。

いま、物理的に意味のない新たな変数$\mathbf{y}$を導入し、変位ベクトル$\mathbf{x}$を次のように定義する。

$$\mathbf{x}=\mathbb{M}^{-1}(\mathbb{M}^T\mathbf{y}^{(2)}-\mathbb{B}^T\mathbf{y}^{(1)}+\mathbb{K}^T\mathbf{y}) \qquad (3)$$

対象時間領域を、$0\leqq t\leqq T$とし、時間領域内で運動方程式(1)と式(3)に等価な混合型の変分汎関数を、新たに次式のように構成した。

$$\Pi=\int_0^T\Big[\mathbf{x}^T(\mathbb{M}^T\mathbf{y}^{(2)}-\mathbb{B}^T\mathbf{y}^{(1)}+\mathbb{K}^T\mathbf{y})-\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbb{M}\mathbf{x}-\mathbf{y}^T\bar{\mathbf{f}}\Big]dt-\Big[\mathbf{y}^T\bar{\mathbb{F}}_0+(\mathbf{y}^{(1)})^T\bar{\mathbb{F}}_1\Big]_0^T \qquad (4)$$

いま、$t=T$における境界条件として、$\mathbf{y}|_{t=T}=\mathbb{O}$、$\mathbf{y}^{(1)}|_{t=T}=\mathbb{O}$、を強制すると、$\mathbf{x}$と$\mathbf{y}$に関する停留条件から次のようなオイラー方程式が得られる。

$$\mathbb{M}^T\mathbf{y}^{(2)}-\mathbb{B}^T\mathbf{y}^{(1)}+\mathbb{K}^T\mathbf{y}=\mathbb{M}\mathbf{x}\qquad \text{in } 0<t<T \qquad (5)$$

$$\mathbb{M}\mathbf{x}^{(2)}+\mathbb{B}\mathbf{x}^{(1)}+\mathbb{K}\mathbf{x}=\bar{\mathbf{f}}\qquad \text{in } 0<t<T \qquad (6)$$

$$\bar{\mathbb{F}}_0=-(\mathbb{M}\mathbf{x}^{(1)}+\mathbb{B}\mathbf{x})\ ,\quad \bar{\mathbb{F}}_1=\mathbb{M}\mathbf{x}\qquad \text{on } t=0 \qquad (7)$$

式(7)は、$t=0$における自然境界条件式で、自然変数$\bar{\mathbb{F}}$は直接$\mathbf{x}$，$\mathbf{x}^{(1)}$と対応する。

3　有限要素技法による離散化

全対象時間領域を部分時間領域（時間要素）t_mの集合として理想化し、節点変数として$\mathbf{u}_i$，$\mathbf{v}_i$を導入する。

$$\mathbf{u}_i^T=\langle\mathbf{y}_i^T,(\mathbf{y}_i^{(1)})^T\rangle\ ,\quad \mathbf{v}_i^T=\langle\mathbf{x}_i^T,(\mathbf{x}_i^{(1)})^T\rangle \qquad (8)$$

各時間要素内の変数ベクトル、$\mathbf{x}$，$\mathbf{y}$をおのおの3次の多項式で補間すると、式(4)の変分汎関数の停留条件に対応して、次のような関係式が得られる。

$$\begin{bmatrix}\Omega_{11} & \Omega_{12}\\ \Omega_{21} & \mathbb{O}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathbf{v}_i\\ \mathbf{v}_{i+1}\\ \mathbf{u}_i\\ \mathbf{u}_{i+1}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\mathbb{O}\\ \\ -\mathbb{F}_i\\ \mathbb{F}_{i+1}\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}\mathbb{O}\\ \\ \tilde{\mathbf{f}}_i\\ \tilde{\mathbf{f}}_{i+1}\end{Bmatrix} \qquad (9)$$

ここで、$\tilde{\mathbf{f}}_i$，$\tilde{\mathbf{f}}_{i+1}$は等価節点力のベクトルである。

式(9)において、$\langle\mathbf{v}_i^T,\mathbf{v}_{i+1}^T\rangle$を消去すると、最終的な時間要素関係式が式(10)のように得られる。

$$\begin{bmatrix}\mathbb{K}_{11} & \mathbb{K}_{12}\\ \mathbb{K}_{21} & \mathbb{K}_{22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathbf{u}_i\\ \mathbf{u}_{i+1}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-\mathbb{F}_i\\ \mathbb{F}_{i+1}\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}\tilde{\mathbf{f}}_i\\ \tilde{\mathbf{f}}_{i+1}\end{Bmatrix} \qquad (10)$$

ここで、

$$\mathbb{F}_i=\begin{Bmatrix}\mathbb{F}_0\\ \mathbb{F}_1\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}-\mathbb{B} & -\mathbb{M}\\ \mathbb{M} & \mathbb{O}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathbf{x}_i\\ \mathbf{x}_i^{(1)}\end{Bmatrix}=\mathbb{N}\mathbf{v}_i \qquad (11)$$

$$\left.\begin{aligned}&\mathbb{K}_{11}=\begin{bmatrix}\mathbb{k}_{11} & \mathbb{k}_{12}\\ \mathbb{k}_{21} & \mathbb{k}_{22}\end{bmatrix}\\ &\mathbb{k}_{11}=\frac{13}{35}\mathbb{K}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{K}^Tt_m+\frac{1}{2}(\mathbb{B}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{K}^T+\mathbb{K}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{B}^T)\\ &\qquad+\frac{6}{5}(\mathbb{B}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{B}^T-\mathbb{K}^T-\mathbb{K}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{M}^T)\frac{1}{t_m}+12\mathbb{M}^T\frac{1}{t_m^3}\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

いま、時間要素終端において$\mathbf{u}_{i+1}=\mathbb{O}$を強制するという条件のもとに、時間要素始端において与えられる$\mathbf{v}_i$に対して$\mathbf{v}_{i+1}$を求めることを考える。自然変数$\mathbb{F}_i$，$\mathbb{F}_{i+1}$が$\mathbf{v}_i$，$\mathbf{v}_{i+1}$に直接対応していることを用いて次のような漸化式が構成される。この式を1要素公式と呼ぶ。

$$\mathbf{v}_{i+1}=-\mathbb{N}^{-1}\mathbb{K}_{21}\mathbb{K}_{11}^{-1}\mathbb{N}\mathbf{v}_i+\mathbb{N}^{-1}(\mathbb{K}_{21}\mathbb{K}_{11}^{-1}\tilde{\mathbf{f}}_i-\tilde{\mathbf{f}}_{i+1}) \qquad (13)$$

4　時間積分のアルゴリズム[2)]

積分時間間隔Δtを時間長さの等しいm個の時間要素

で評価するものとすれば、より高精度な積分公式を構成することができる。すなわち、式(10)に示すマトリックス式をm個の要素について重ね合わせ、境界条件、$\mathbb{U}_m = \mathbb{O}$ のもとで解けば、式(15)のような高精度多要素公式が構成される。

$$\left.\begin{aligned} &\mathbb{H}_0 = \mathbb{O} \ , \quad \mathbb{H}_1 = \mathbb{K}_{21}^{-1} \\ &\mathbb{H}_j = -\mathbb{K}_{21}^{-1}(\mathbb{K}_{11}+\mathbb{K}_{22})\mathbb{H}_{j-1} - \mathbb{K}_{21}^{-1}\mathbb{K}_{12}\mathbb{H}_{j-2} \ (j=2,\cdots,m) \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

$$\left.\begin{aligned} &\mathbb{V}_{i+1} = -\mathbb{N}^{-1}(\mathbb{K}_{11}\mathbb{H}_m + \mathbb{K}_{12}\mathbb{H}_{m-1})^{-1}\mathbb{N}\,\mathbb{V}_i \\ &\qquad + \mathbb{N}^{-1}\left[(\mathbb{K}_{11}\mathbb{H}_m + \mathbb{K}_{12}\mathbb{H}_{m-1})^{-1}\hat{f}_i - \tilde{f}_{i+1}\right] \\ &\hat{f}_i = \tilde{f}_i - \sum_{j=1}^{m-1}(\mathbb{K}_{11}\mathbb{H}_j + \mathbb{K}_{12}\mathbb{H}_{j-1})\tilde{f}_j \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

5 積分スキームとしての特性

外力の作用しない1自由度系の振動を考えると、式(15)は次のようになる。

$$\mathbb{V}_{i+1} = -\mathbb{N}^{-1}(\mathbb{K}_{11}\mathbb{H}_m + \mathbb{K}_{12}\mathbb{H}_{m-1})^{-1}\mathbb{N}\,\mathbb{V}_i \qquad (16)$$

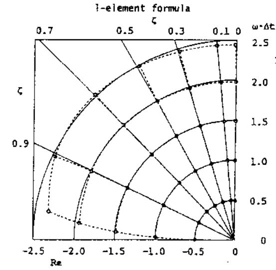
ここで、$\mathbb{N}$, $\mathbb{K}_{ij}$, $\mathbb{H}_i$ は2×2のマトリックスである。

式(16)に示す $\mathbb{V}_{i+1}$ と $\mathbb{V}_i$ の関係式における作用素の固有値解析を行うことにより、本積分スキームの精度、安定性を評価できる[3)]。図1(a)~(c)は、無減衰の場合の作用素の固有値の絶対値 $|E_m|$ を示したもので、横軸上段に系の固有振動数 ω と時間要素長さ t_m との積 $\omega \cdot t_m$、下段に同じく積分時間間隔 Δt との積 $\omega \cdot \Delta t$、をとっている。2要素公式以上であれば無条件安定である。図2(a)~(c)は、減衰がある場合であり、$\omega\Delta t$ と減衰係数 ζ とを変数として、作用素の固有値を求め、規範伝達関数の固有値 $e^{\lambda\Delta t}$ と $\lambda\Delta t$ 平面で比較することによって積分法の精度を評価したもので、本積分スキームが高精度であることがわかる。与えたスキームの特性と比較するため、Newmark のβ法(β=1/4)の特性を図1(d), 図2(d)に示す。

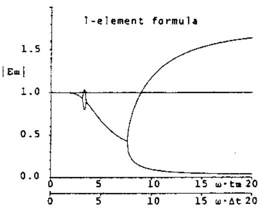
6 数値計算例

図3に示すような5自由度系を対象とし、初期条件として最上部の質点に10cmの変位を与えた場合の自由振動の解析を行い、(1)モード解析(Duhamel積分)による方法、(2)Newmarkのβ法(β=1/4)、と本積分法の1要素公式、5要素公式とを比較し、図4に示した。ただし、減衰係数は5%、時間刻み幅 Δt を、$\Delta t = 0.3$ 秒とした。

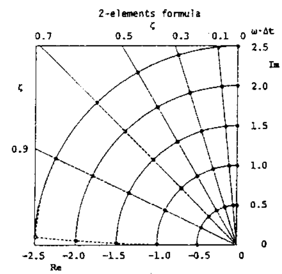
参考文献
1) 吉田,他:土木学会論文報告集 No.254. 1976.10.
2) 吉田,他:土木学会論文報告集 No.313 1981.9.
3) 清水,他:日本機械学会論文集(C編)46巻404号 昭55.1.



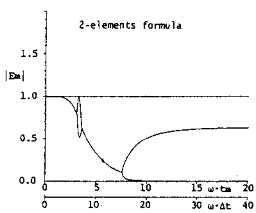
(a) 1要素公式



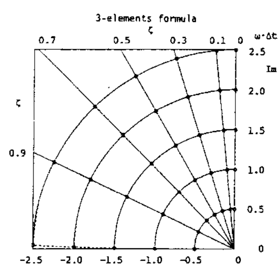
(a) 1要素公式



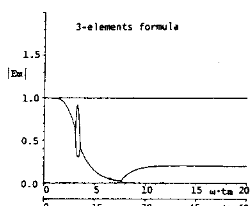
(b) 2要素公式



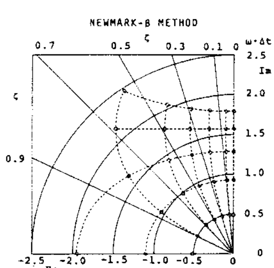
(b) 2要素公式



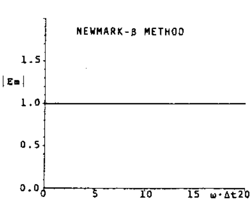
(c) 3要素公式



(c) 3要素公式



(d) Newmark β法(β=1/4)



(d) Newmark β法(β=1/4)

図2. λΔt平面[(ωΔt, ζ)平面]のひずみ　　図1. 固有値の絶対値

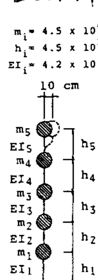


図3. 対象

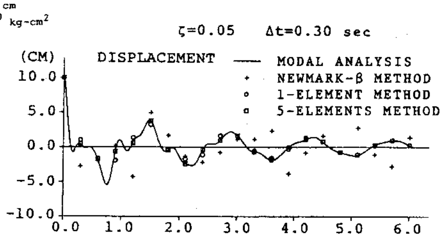


図4. 解析例(最上部質点の応答変位)