

東海大学海洋学部 正員 北条道弘
 京都大学工学部 正員 丹羽義次
 日本道路公団 正員 山崎幹夫

1. はじめに

積分方程式法が半無限弾性波動問題（構造物と地盤の相互作用問題等）の解析に有効であることはよく知られている¹⁾。しかし、この積分方程式法を非均質弾性体の波動問題に適用しようとする場合、非均質（動）弾性体に対する基本解が求まらないという問題が生じる。本報告は積分方程式法を持つこの難点を解消するための一手法を提案し、均質半無限体上の非均質構造物の応答を考えるものである。この手法の特徴は、非均質（有限）領域において、均質静弾性問題の基本解を利用して非均質動弾性問題に対するグリーンマトリックスを数値的に構成することにある²⁾。なお、均質半無限弾性体に対しては通常の境界積分方程式法が適用できる。一般に土木構造物周辺の地盤は非常に複雑な地層構造を有しているが、この変化が構造物周辺の有限な領域に限られると仮定できる場合には、本手法はこのような非均質周辺地盤-構造物系の波動応答解析に対する有効な手段になるものと思われる。

2. 基礎式と境界条件

Fig.1に示すように、等方非均質弾性体内(D^1, D^2)で Lamé 定数 $\lambda(\mathbf{x}), \mu(\mathbf{x})$ は領域内の各点で変化し、等方均質半無限弾性体内で一定値 λ^0, μ^0 を持つものとする。このとき、非均質領域内における基礎式は次のようになる。

$$\mathbf{L}(\lambda, \mu; \partial) \mathbf{u} \equiv \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \nabla \cdot \{\mu(\nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla)\} + \rho \omega^2 \mathbf{u} = -\rho \mathbf{f} \quad (1)$$

半無限境界 ∂D^0 と非均質体の境界 ∂D^1 は自由表面であるとする、即ち、

$$\mathbf{t} = \mathbf{T}(\lambda, \mu; \partial) \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{on } \partial D^1, \quad \mathbf{t} = \mathbf{T}(\lambda^0, \mu^0; \partial) \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{on } \partial D^0 \quad (2)$$

ここに、 $\mathbf{T}(\lambda, \mu; \partial) = \lambda \nabla \nabla + \mu \nabla \cdot \nabla \mathbf{I} + \mu(\nabla \nabla)^T$ (3)

である。Fig.1に示す $\mathbf{N}$ は入射波の進行方向であり、散乱波は無限遠において放射条件を満足するものとする。

3. 非均質体内における変位の積分表現

まず、非均質領域内における Lamé 定数 $\lambda(\mathbf{x}), \mu(\mathbf{x})$ を均質部分（一定値又は平均値と考えよう） λ^*, μ^* と非均質部分 $\bar{\lambda}(\mathbf{x}), \bar{\mu}(\mathbf{x})$ に分離する、即ち、次のように考える。

$$\lambda(\mathbf{x}) = \lambda^* + \bar{\lambda}(\mathbf{x}), \quad \mu(\mathbf{x}) = \mu^* + \bar{\mu}(\mathbf{x}) \quad (4)$$

物質の非均質性に起因する項と加速度項を物体力項と考えれば、基礎式(1)は均質部分について次のように書ける。

$$\mathbf{M}(\lambda^*, \mu^*; \partial) \mathbf{u} \equiv \lambda^* \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \mu^* (\nabla \nabla + \nabla \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\mathbf{F} \quad (5)$$

ここに、 $\mathbf{F}$ は次のようである。

$$\mathbf{F} = \mathbf{L}(\bar{\lambda}, \bar{\mu}; \partial) \mathbf{u} + \rho \mathbf{f} = \nabla(\bar{\lambda} \nabla \cdot \mathbf{u}) + \nabla \cdot \{\bar{\mu}(\nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla)\} + \rho \omega^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{f} \quad (6)$$

式(5)は見掛け上均質静弾性問題の基礎式であり、静弾性問題の基本解 $\mathbf{V}$ を $\mathbf{M}(\lambda^*, \mu^*; \partial) \mathbf{V} = -\delta \mathbf{I}$ と定義すれば $\mathbf{V}$ は次のようになる。

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \frac{1}{4\pi\mu^*(\lambda^*+2\mu^*)} \{(\lambda^*+3\mu^*) \log \frac{1}{r} \mathbf{I} + (\lambda^*+\mu^*) (\nabla \nabla)(\nabla \nabla)^T\} \quad (r=|\mathbf{X}-\mathbf{Y}|) \quad (7)$$

式(5), (7)より、非均質動弾性体の変位場はグリーン公式により次のように書ける ($D=D^1$ or D^2 , $\partial D=\partial D^1$ or ∂D^2 or $\partial D^1 \cup \partial D^2$)。

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \int_{\partial D} [\mathbf{V}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \{\mathbf{T}(\lambda^*, \mu^*; \partial) \mathbf{u}(\mathbf{y})\} - \{\mathbf{V}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{T}(\lambda^*, \mu^*; \partial)\} \mathbf{u}(\mathbf{y})] dS_{\mathbf{y}} + \int_D \mathbf{V}(\mathbf{x}, \mathbf{Y}) \mathbf{F}(\mathbf{Y}) dV_{\mathbf{Y}} \quad (8)$$

上式の物体力項は次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} \int_D \mathbf{V}(\mathbf{x}, \mathbf{Y}) \mathbf{F}(\mathbf{Y}) dV_{\mathbf{Y}} &= \int_{\partial D} [\mathbf{V}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \{\mathbf{T}(\bar{\lambda}, \bar{\mu}; \partial_{\mathbf{y}}) \mathbf{u}(\mathbf{y})\} - \{\mathbf{V}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{T}(\bar{\lambda}, \bar{\mu}; \partial_{\mathbf{y}})\} \mathbf{u}(\mathbf{y})] dS_{\mathbf{y}} \\ &+ \int_D \tilde{\mathbf{V}}(\mathbf{x}, \mathbf{Y}) \mathbf{u}(\mathbf{Y}) dV_{\mathbf{Y}} + \int_D \{\bar{\lambda}(\mathbf{Y}) - \frac{\lambda^*}{\lambda^*+2\mu^*} \bar{\mu}(\mathbf{Y})\} \tilde{\mathbf{V}}(\mathbf{x}, \mathbf{Y}) \mathbf{u}(\mathbf{Y}) dV_{\mathbf{Y}} \\ &+ \int_D \frac{\bar{\mu}(\mathbf{Y})}{\mu^*} \{\mathbf{M}(\lambda^*, \mu^*; \partial_{\mathbf{Y}}) \mathbf{V}(\mathbf{x}, \mathbf{Y})\} \mathbf{u}(\mathbf{Y}) dV_{\mathbf{Y}} + \int_D \mathbf{V}(\mathbf{x}, \mathbf{Y}) \{\rho \omega^2 \mathbf{u}(\mathbf{Y}) + \rho \mathbf{f}(\mathbf{Y})\} dV_{\mathbf{Y}} \end{aligned} \quad (9)$$

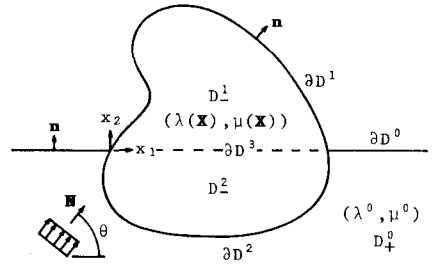


Fig.1 非均質体(D^1, D^2)と均質半無限体(D^0)

ここに、 $\tilde{V}u$ 及び $\tilde{\tilde{V}}u$ は次のようである（微分は点 Y に属する微分）。

$$\{\tilde{V}(X,Y)u(Y)\}_i = \{\bar{\lambda}(Y)^{ij}V_{jk}(X,Y)^{rk} + \bar{\mu}(Y)^{rk}V_{ij}(X,Y)^{rk} + \bar{\mu}(Y)^{rk}V_{jk}(X,Y)^{ij}\}u_j(Y), \quad \{\tilde{\tilde{V}}(X,Y)u(Y)\}_i = V_{ik}(X,Y)^{rk}u_j(Y) \quad (9)$$

これより、基本解 V の定義式及び二重層ポテンシャルの境界極限に注意して、変位の積分表現として次式を得る。

$$\alpha(X)u(X) = \int_{\partial D} V(X,Y) \{T(\lambda,\mu;\partial_y)u(y)\} dS_y - \int_{\partial D} \{\tilde{V}(X,Y)T(\lambda,\mu;\partial_y)\} u(y) dS_y \\ + \int_D \tilde{V}(X,Y)u(Y) dY + \int_D \{\bar{\lambda}(Y) - \frac{\lambda^*}{\mu^*} \bar{\mu}(Y)\} \tilde{\tilde{V}}(X,Y)u(Y) dY + \rho\omega^2 \int_D V(X,Y)u(Y) dY \quad (\text{ただし, } f=0) \quad (11)$$

ここに、 $\alpha(X) = \mu(X)/\mu^*$, $X \in D$; $\{3\lambda^*\mu(X) + 4\mu^*\mu(X) - \mu^*\lambda(X)\}/4\mu^*(\lambda^* + 2\mu^*)$, $X = X \in \partial D$; $0, X \notin D \cup \partial D$ である。

4. 均質半無限体内における変位の積分表現

均質半無限体 D_0^+ 内においては通常の境界積分表現

$$\beta(X)u(X) = u^T(X) + \int_{\partial D} U(X,Y;\omega) \{T(\lambda,\mu;\partial_y)u(y)\} dS_y - \int_{\partial D} \{U(X,Y;\omega)T(\lambda,\mu;\partial_y)\} u(y) dS_y \quad (12)$$

が用いられる。ここに、 u^T は入射波であり、 U は次式 $L(\lambda,\mu;\partial)U = -\delta I$ により定義される定常動弾性問題に対する基本解であり、次のようである。

$$U(X,Y;\omega) = \frac{i}{4\mu^*} [H_0^{(1)}(k_0 r)I + \frac{1}{k_0^2} \nabla \nabla \{H_0^{(1)}(k_0 r) - H_0^{(1)}(k_L r)\}] \quad (13)$$

5. 非均質体-均質半無限体系に対する積分方程式系

境界 ∂D^2 及び ∂D^2 上の変位と応力の連続条件を用いれば、積分表現(11)及び(12)より、均質半無限体上の非均質体の波動応答解析に対する積分方程式系を得る。

6. 解析結果

本報告で提案した手法は D^1, D^2 が均質な場合にも適用できる。また、この場合には通常の境界積分方程式法が D^1, D^2 内にも適用できる。Fig.2 は、半無限体上に均質長方形構造物が存在する場合について、境界積分方程式法による結果と本手法による結果を比較したものである。入射波は平面P波であり、入射方向は図中に矢印で示してある。図の縦軸は入射波の振幅に対する点Aの鉛直(x2)方向の変位振幅の比を示しており、横軸は構造物の高さで無次元化した横波の波数（縦波波数を $\nu = 1/4$ に対し換算してある）を示している。両解析結果がよく一致していることがわかる。Fig.3 は根入れを有する構造物にS波が鉛直に入射した場合、構造物の頂上の点A (Fig.2 参照)の変位応答のピークに対応する波数に対する構造物の応答を示している。Fig.4 は非均質構造物の根入れ効果を検討したものである。(a)が根入れのない場合、(b)が根入れのある場合である。根入れ効果はS波入射の場合に顕著である。詳細については当日報告する。

参考文献

- 1) Kobayashi, S. & Nishimura, N., Developments in BEM-2, 199-210, Appl. Science Pub., 1982.
- 2) Nawa, Y. et al., Theoretical & Applied Mechanics, 31, 245-263, 1982.

Fig.4 非均質構造物の根入れ効果 ($\kappa = \mu/\mu^0$)

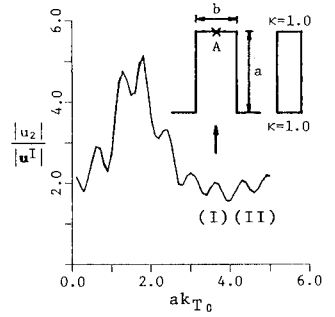


Fig.2 境界積分方程式 (I) と領域型積分方程式 (II) の比較 ($\kappa = \mu/\mu^0$)

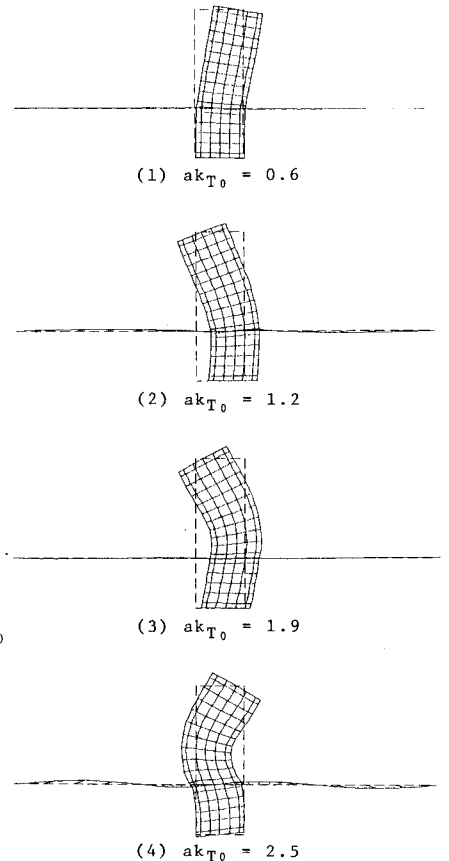


Fig.3 S波入射に対する変位応答図