Ⅳ－195　不動点アルゴリズムによるネットワーク均衡流の計算法

岐阜大学　正員　加藤晃
〃　〃　宮城俊彦
愛知県庁　〃　野々山弘紀

1.はじめに

本研究は、ネットワーク均衡問題に対し、不動点アルゴリズムの考え方に基づいて新しい均衡条件を誘導し、同時に、その解法を提案することを目的としている。

従来の均衡問題は、Beckmannら[1]による均衡モデルにみられるように非線形凸計画問題として定式化し、その結果得られる最適解がWardrop均衡を満足するという説明がなされた。しかし、数理最適化手法を用いるアプローチでは、パフォーマンス関数や需要関数が積分可能であるという前提があり、これによって解法の適用範囲が限定されていた。また、非線形計画問題の目的関数のもつ意味が不明瞭であり、この点でも問題があった。それに対し不動点アルゴリズムに基づく方法は、Wardropが述べた均衡条件を直接定式化し、解こうとするものであり、より現実的な交通均衡をモデル化することが可能であると考えられる。

2.不動点アルゴリズムによる需要固定型均衡問題の解法

まず単一ODの場合について概明する。

各径路交通量をX_i（$i=1,\cdots,N$，N：径路数）とし、ODペア間の総需要量をDとすると次式が成立する。

$$\sum_{i=1}^{N} X_i = D \qquad (1)$$

また、$x_i = X_i/D$を定め、このx_iを単位径路交通量と呼ぶ。このとき$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1$が成立する。

単位径路交通量x_iを表示するのに図-1に示す重心座標を用いる。一般にx_iを表わす空間を単体と呼ぶ。N個の径路変数によって構成される単体は（$n-1$）の次元をもち、N個の頂点をもつ。またこの単体上の点xは、単体の端点の座標を$V^1, V^2, \cdots, V^N$とすると次式で与えられる。

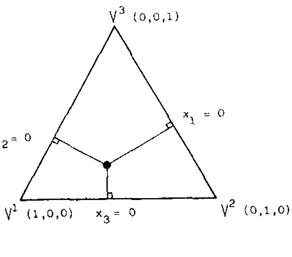

図-1　重心座標

$$x = x_1V^1 + x_2V^2 + \cdots + x_NV^N \qquad (2)$$

ただし，$x_i \geq 0$（$i=1,\cdots,N$），$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1$

図-1は1個の単体であるが、これをさらに分割するときの1辺の分割数を分割の次数と呼ぶことにする。図-2は、図-1の単体を次数$n=5$で分割したものである。分割された小単体上の端点の座標は次式によって示される。

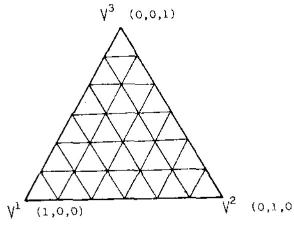

図-2　単体のn次分割

$$x = \frac{1}{n}(k_1, k_2, \cdots, k_N) \qquad (3)$$

ただし、$k_i \geq 0$，$\sum_{i=1}^{N} k_i = n$

ところで、Wardrop均衡と不動点との関係については、Smithによって明らかにされている[2]。また、不動点原理と単体におけるラベル付けとの関係はSpernerの補題によって示されている[3]。このように、Wardrop均衡を解くためには、均衡問題によって与えられる単体にいかにラベル付けをしていくかという問題に他ならない。

この点について、本研究でとられたアプローチは次のようである。すなわち、不動点アルゴリズムによる均衡解を求めるため端点xに付けるラベル付けの規則を次のように定める。

ラベル付け規則1　交通流$\mathbb{X}$に対し

$$C_h(\mathbb{X}) = \max_{j, X_j > 0} C_j(\mathbb{X}) \qquad (4)$$

ここに$C_j(\cdot)$は$\mathbb{X}$が与えられたときの径路jの走行時間を表わす。このとき$\mathbb{X}$に対応した単位交通量xでのラベルは次式で与えられる。

$$L(x) = h \quad h \in \mathbb{P}\ (\mathbb{P}：径路番号の集合) \qquad (5)$$

このラベル付けの規則と、均衡解の間には重要な2つの補題がある[4]。

補題1　$\bar{\mathbb{X}}$を均衡解とするならば、そのとき$\bar{\mathbb{X}}$のε-近傍において規則1に従う完備なラベルが存在する。

補題2　単体Sの端点に完備なラベルが付けられたならば、そのときS上の端点は均衡解$\bar{\mathbb{X}}$のε-近傍を与える。

以上の補題に示されるように、均衡問題を解くことは、単体上に完備なラベル付けを行なうことである。

完備なラベルをもった小単体を求めるための基本的操作は次のようである。

①単体の分割次数nを決定し、初期解を決定する（どの小単体からスタートするかを決める）。

②解ベクトルに対応したリンクフローを決定し、リンクコスト，パスコストを決定する。

③規則１に従うラベル付けを行なう。

④完備なラベル付けが行なわれているかどうかをチェックする。もし完備なラベル付けが行なわれているならば、手順⑥へ進む。そうでないならば、次へ進む。

⑤ピボット操作によってラベルの付け換えを行ない、解を改新する。そして、手順②へ戻る。

⑥所要の精度を満足しているかどうかをチェックする。もし満足しているならば計算を終了し、そうでない場合には次数を増加して、①へ戻る。

3.需要変動型均衡問題への拡張

具体的に図-3に示す単一ODネットワークを例に説明する。ここで、再帰リンクとは、ODペア間の需要量の増加によって通行価格が減少するという、いわば逆需要関数の性質をもつものである。よってこのODペアは、２本の単調増加関数をもった径路と、１本の単調減少関数の径路、計３本の径路をもつネットワークに帰着される。しかし、単調減少関数を含む場合、ピボット操作が適用できない。そこで、再帰リンクを表わす需要関数を単調増加関数に変換することを試みる。

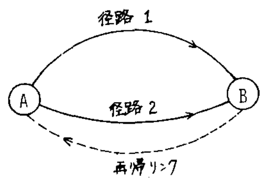

図-3 再帰リンクを含むハイパーネットワーク

図-4に示す需要曲線の負の傾きを絶対値を同じまま正に変え原点から引き直し、これを破線で示す。そして、この２本のパフォーマンス関数と、変換された需要関数の間で通行コストを均衡させる。つまり、この変換された需要関数を第３の径路と考え、この３本の径路間に仮の需要量D'_aを配分するのである。

すなわち、ODペアａの合成関数によって仮の需要量D'_aのときの通行価格を決定する。この価格は今求めようとしている均衡価格$\bar{C}_a$に他ならない。次に、パフォーマンス関数から均衡価格における各径路の交通量X_1, X_2を求めてやり、$X_1+X_2=\bar{D}_a$によってODペア間の総需要量を求めることができる。

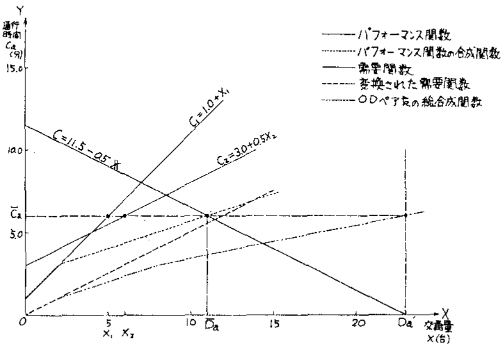

図-4 需要変動型均衡問題の需要固定型均衡問題への変換

4.計算例

需要変動型均衡問題への不動点アルゴリズムの適用結果を以下に示す。例題計算に用いたネットワークを図-5に示す。なお、需要曲線には線形需要曲線を用い、またパフォーマンス関数には、BPR関数を用いた。

参考文献

(1) Beckmann, et al (1956) *Studies in the economics and transportation*. Yale Univ. Press.

(2) Smith, M.J. (1979) *The existence, uniqueness and stability of traffic equilibria*. Transpn. Res.

(3) Franklin, J. (1980) *Methods of mathematical economics*.

(4) 加藤，宮城，野々山 (1982) 不動点アルゴリズムによる交通均衡の計算法，第４回計画学研究発表会

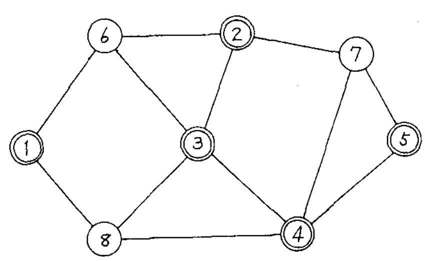

図-5 配分対象ネットワーク

表-1 計算結果

	O/D PAIR		1 - 2	1 - 3	1 - 4	1 - 5	2 - 3	2 - 4	2 - 5	3 - 4	3 - 5	4 - 5
1	PATHFLOW	(Veh.)	292.4	195.5	157.6	316.7	303.6	403.3	214.3	352.6	277.8	409.1
	PATHCOST	(Min.)	17.76	27.40	37.43	30.34	9.64	19.68	12.58	17.75	22.22	7.09
2	PATHFLOW	(Veh.)		80.5	168.1							
	PATHCOST	(Min)		27.40	37.43							
	O/D FLOW	(Veh.)	292.4	276.1	325.7	316.7	303.6	403.3	214.3	352.6	277.8	409.1