Ⅳ-85　都市高速道路の最適拡張過程と料金水準

岡山大学工学部　正員　井上博司

1. はじめに

都市高速道路の規模をどの程度にまで整備しまたどのような料金水準で供用するかについては，交通需要および道路網の空間的構造のみならず，その時間的な経緯すなわち都市交通需要の成長とともに，どのようなプロセスで道路建設を行い利用者に提供するかという時間的な要素が重要である。従来の都市高速道路の規模および料金水準に関する研究ではこの点に関する考慮があまりなされておらず，このため都市高速道路網の全体が瞬間的に完成し，その需要および建設費の償還が瞬間的に完結するという非現実的なモデルになっていた。

本稿においては都市高速道路の整備に関するプロセスについてモデル化を行い，最適制御理論を用いてその最適過程を求める。すなわち与えられた計画期間のもとで借入金によって道路の建設を行い，料金収入によってその償還を行い，かつこの間の道路の利用者の余剰（消費者余剰）の現在価値を最大にするためには，どのようなプロセスで道路の建設を行い，またどのような料金水準で利用者に提供すればよいかについて考察する。

2. モデル化

簡単のため車種を1車種に限り，料金は均一料金制とする。都市高速道路の規模はその路線延長距離によって表わすものとする。都市高速道路に対する交通需要量 q は規模 x および料金 p の関数となるであろう。この需要関数を $q=f(x,p)$ と表わす。関数 $f(x,p)$ は料金 p については単調減少，規模 x については単調増加関数である。ここで需要関数 $f(x,p)$ は $a(x)\,b(p)$ という形に変数分離できるものと仮定する。次に都市高速道路を単位路線延長距離だけ建設するために必要な費用は一定であるとしよう。また高速道路の建設はすべて借入金で行い，料金収入によって償還するものとしよう。さらに実際の高速道路の建設は段階的であるが，これを時間的に連続な過程であるとしよう。t期の借入金を $u(t)$，t期の負債額を $z(t)$，利子率を δ とする。このとき規模 x および負債額 z に関する次の状態方程式を得る。

$$\dot{x} = cu, \quad c\text{は定数} \tag{1}$$

$$\dot{z} = \delta z + u - p\,a(x)\,b(p) \tag{2}$$

なおここでは維持管理費用は考えていない。ところでt期の利用者の消費者余剰 S_c は，

$$S_c = \int_p^\infty f(x,p)\,dp = a(x)\int_p^\infty b(p)\,dp \tag{3}$$

となる。よって時間によって割引いた $t=0$ から $t=T$ までの消費者余剰の現在価値は

$$J = \int_0^T e^{-\delta_0 t} S_c(t)\,dt = \int_0^T e^{-\delta t}\left\{a(x)\int_p^\infty b(p)\,dp\right\}dt \tag{4}$$

となる。ここで δ_0 は社会的割引率であるが，簡単のため以後は利子率 δ に等しいとする。

借入金 $u(t)$ は財政規模によってその上限が存在するものと考えられる。この上限値は一定とし，これを $\bar{u}$ とする。したがって制御変数 $u(t)$ は　$0 \leqq u(t) \leqq \bar{u}$　でなければならない。

以上より問題は状態方程式(1)，(2) および $u(t)$ に関する制約条件式のもとで，評価関数 (4) を最大にするものとなる。ここに制御変数はt期の借入金 $u(t)$，t期の料金水準 $p(t)$ であり，状態変数はt期の都市高速道路の規模 $x(t)$ および負債額 $z(t)$ である。明らかに $t=0$ においては規模および負債額はゼロであり，また与えられた計画期間Tの期末において償還が完了しなければならない。したがって初期条件，終端条件は次のようになる。

$$\text{初期条件：}\ x(0)=0,\ z(0)=0, \qquad \text{終端条件：}\ z(T)=0 \tag{5}$$

3. ポントリャーギンの最大原理による求解

以上の問題はポントリャーギンの最大原理を用いて次のように解くことができる。いま $y=\int_0^t e^{-\delta t} S_c(t)\,dt$

とおくと

$$\dot{y} = e^{-\delta t} a(x) \int_p^{\infty} b(p)\,dp \tag{6}$$

よって補助状態変数をϕ_x, ϕ_z とするとハミルトニアンは

$$H = e^{\delta t}\left[-a(x)\int_p^{\infty} b(p)\,dp + \phi_x c u + \phi_z\left\{\delta z + u - a(x) b(p)\right\}\right] \tag{7}$$

$H \to min$ となる最適制御パターン u^* は明らかに $c\phi_x+\phi_z > 0$ なら $u^*=0$, $c\phi_x+\phi_z<0$ なら$u^*=\bar{u}$ である。これは $t=0$ から $t=t_s$ までは借入金を上限一杯にして高速道路を建設し, $t=t_s$ 以降は専ら料金収入によって借入金を償還するという戦略が最適であることを意味している。すなわち

$$\begin{aligned} &0 \leqq t \leqq t_s \quad \text{においては} \quad u^* = \bar{u} \\ &t_s \leqq t \leqq T \quad \text{においては} \quad u^* = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

また高速道路の最適料金水準 p^* については $\partial H/\partial p = 0$ より

$$p^* = (1-\phi_z)\, b(p) / \phi_z b'(p) \tag{9}$$

となる。ただし $\partial^2 H/\partial p^2 = (1-2\phi_z) b'(p) + \phi_z p\, b''(p) > 0$ とする。

次にこの戦略のもとでの補助状態変数 ϕ_x, ϕ_z を求めよう。

$$\frac{d}{dt}(e^{-\delta t}\phi_z) = -\partial H/\partial z = -\delta\phi_z e^{-\delta t}$$

より $\dot{\phi}_z = 0$ となり, これより $\phi_z = k_1$ (k_1は定数) が導かれる。したがって最適料金水準 p^*は

$$p^* = (1-k_1)\, b(p) / k_1 b'(p) \tag{10}$$

となる。式(10)より最適料金水準は時間tにもまた規模xにも依存していないことがわかる。このことは最適料金水準は期間に依らず一定であることを意味するものである。もっとも一般諸物価の上昇を考慮すればこれは料金水準は物価の上昇にスライドして設定すべきであると解釈できるかも知れない。

一方 $\frac{d}{dt}(e^{-\delta t}\phi_x) = -\partial H/\partial x$ より

$$\phi_x = k_2 e^{\delta t} - \frac{1}{\delta} C_1, \quad k_2 \text{は定数}, \quad C_1 = a'(x)\left\{\int_{p^*}^{\infty} b(p)\,dp + k_1 p^* b(p^*)\right\} \tag{11}$$

を得る。ところで道路網の規模xについては $\dot{x} = c u^*$, および $t=t_s$ における連続性より

$$x = \begin{cases} c\bar{u}t, & (0 \leqq t \leqq t_s) \\ c\bar{u}t_s, & (t_s \leqq t \leqq T) \end{cases} \tag{12}$$

となる。負債額については $\dot{z} = \delta z + u^* - p^* a(x) b(p^*)$ および $t=t_s$ における連続性より

$$z = \begin{cases} \left(\frac{1}{\delta}\bar{u} + \frac{1}{\delta^2}C_2 c\bar{u}\right)(e^{\delta t}-1) - \frac{1}{\delta}C_2 c\bar{u}\,t, & (0 \leqq t \leqq t_s) \\ \left(\frac{1}{\delta}\bar{u} + \frac{1}{\delta^2}C_2 c\bar{u}\right)(1-e^{-\delta t_s})e^{\delta t} - \frac{1}{\delta}C_2 c\bar{u}\,t_s, & (t_s \leqq t \leqq T) \quad C_2 \text{は定数} \end{cases} \tag{13}$$

となる。制御切換え時刻 t_s および定数k_1, k_2, C_2 は需要関数 $f(x,p)$ をたとえば $f(x,p) = x(-ax+b)$ とすると次の条件より求めることができる。

(i) $t=T$で償還が完了するという条件 $z(T)=0$ より

$$\left(1+\frac{1}{\delta}C_2 c\bar{u}\right)(1-e^{-\delta t_s})e^{\delta T} - C_2 c\bar{u}\,t_s = 0 \tag{14}$$

(ii) $t=t_s$ で制御が切り換わることより $c\phi_x(t_s) + \phi_z(t_s) = 0$ よって

$$c\left(k_2 e^{\delta t_s} - \frac{1}{\delta}C_1\right) + k_1 = 0 \tag{15}$$

(iii) $t=T$で規模xが指定されていないことより $\phi_x(T)=0$ よって

$$k_2 e^{\delta T} - \frac{1}{\delta}C_1 = 0 \tag{16}$$

この場合定数 C_2 は $C_2 = 3b^2 k_1(1-k_1)/a(1+2k_1)^2$

4. おわりに

ここで用いたモデルはきわめて簡単なものであり, 試論の域を出ないものである。今後前提条件の吟味とともにより一般的な条件を導入し, モデルの拡大, 発展を図りたい。