

大成建設 正員 ○ 下茂 道人, 亀村 勝美

1. はじめに 地盤中の二相流体 (水-油, 油-空気など) の運動については, 古くから主に石油技術者らによって研究されてきた。彼らが研究対象としたのは, ウォーターフラッディングと呼ばれる油田からの油の二次産出に関する問題であった。土木の分野においては, 油や天然ガスの地下貯蔵において, 環境保全および経済上の立場から, これら流体の岩盤内への漏洩について検討する際に, この二相流解析手法が有効である。二相流問題は, 2相の非線形偏微分方程式で表現されるが, これまで, 主に差分法による解析がなされてきた。¹⁾ 本論文では, 複雑な境界条件や, 物性値の不均一性を容易に取り扱える重み付き残差法による有限要素解析手法について述べ, 解の精度すなわち飽和度分布ならびにフロント形状について検討した結果を示す。

なお簡単のために, 対象を非圧縮性, 非混合性流体に限定した。

2. 二相流の支配方程式 各相の流体の運動方程式は, 拡張されたダルシー則により次式で表わされる。

$$Un = -K_{ij} \frac{k_{rn}}{\mu_n} \frac{\partial}{\partial x_j} (P_n + P_n g x_3) \quad (1)$$

$$Uw = -K_{ij} \frac{k_{rw}}{\mu_w} \frac{\partial}{\partial x_j} (P_w + P_w g x_3) \quad (2) \quad i=1,2,3$$

ここに, 小文字 n, w は, それぞれ, ぬれない流体 (non-wetting fluid; 表面張力の小さい方の流体) および, ぬれる流体 (wetting fluid; 表面張力の大きい方の流体) についての値であることを示す。また Un, Uw は流体のみかけの流速, μ_n, μ_w は流体の粘性係数, P_n, P_w は流体比重, g は重力加速度, k_{rn}, k_{rw} は相対透過係数, K_{ij} は媒体の異方性を考慮した絶対透過性テンソルである。

また, 各相についての質量保存則は, 流体の非圧縮性および非混合性を仮定して次式で表わされる。

$$\frac{\partial Un}{\partial x_i} + \frac{\partial (\phi S_n)}{\partial t} + g_n = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial Uw}{\partial x_i} + \frac{\partial (\phi S_w)}{\partial t} + g_w = 0 \quad (4)$$

ここに, ϕ は空隙率, S_n, S_w は各流体の飽和度, g_n, g_w は単位体積当りの注入 (排出) 流量である。

さらに, 次の飽和度および毛管圧に関する式を付加する。

$$S_n + S_w = 1 \quad (5)$$

$$P_c = P_n - P_w \quad (6)$$

以上の (1) ~ (6) 式より, 二相流の支配方程式が最終的に次式のように求められる。

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ K_{ij} \frac{k_{rn}}{\mu_n} \frac{\partial}{\partial x_j} (P_n + P_n g x_3) \right\} = -\phi S_w \left(\frac{\partial P_n}{\partial t} - \frac{\partial P_w}{\partial t} \right) + g_n \quad (7), \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ K_{ij} \frac{k_{rw}}{\mu_w} \frac{\partial}{\partial x_j} (P_w + P_w g x_3) \right\} = \phi S_w \left(\frac{\partial P_n}{\partial t} - \frac{\partial P_w}{\partial t} \right) + g_w \quad (8)$$

ただし, $S_w = \frac{\partial S_w}{\partial P_c}$ である。また, 上式では, 岩盤骨格の非圧縮性を仮定している。

したがって, 二相流問題は, 与えられた初期条件 ((9), (10) 式) ならびに境界条件 ((11) ~ (14) 式) を満足するような, (7) 式および (8) 式の解を求める問題に帰着する。

・初期条件 ; $P_n(x_i, 0) = P_n(x_i) \quad (9)$

$$P_w(x_i, 0) = P_w(x_i) \quad (10)$$

・境界条件 ; 圧力既知境界において, $P_n(x_i, t) = P^*(x_i, t) \quad (11) \quad P_w(x_i, t) = P^*(x_i, t) \quad (12)$

$$\text{流量既知境界において, } -K_{ij} \frac{k_{rn}}{\mu_n} \frac{\partial}{\partial x_j} (P_n + P_n g x_3) n_i = Un^* \quad (13), \quad -K_{ij} \frac{k_{rw}}{\mu_w} \frac{\partial}{\partial x_j} (P_w + P_w g x_3) n_i = Uw^* \quad (14)$$

3. 有限要素法による定式化 (7) 式および (8) 式は, 相対透過係数 k_{rn}, k_{rw} および毛管圧 P_c が飽和度に依存して変化する非線形偏微分方程式であり, 一般に理論解を得ることが困難である。よって, 本論文では, 重み付き残差法の一つである Galerkin 法を用いた有限要素法による数値解析を行う。今, 与えられた境界条件を満足するような近似関数を, 次のような一次結合式で表わす。(以下の式中において, α, β, γ についてのみ総和規約を適用する。)

$$P_n(x_i, t) = N_\alpha(x_i) P_{na}(t) \quad (15)$$

$$P_w(x_i, t) = N_\alpha(x_i) P_{wa}(t) \quad (16) \quad \alpha=1,2,\dots$$

そして, (15), (16) 式を (7), (8) 式に代入した時に生じる残差 $L(P_n), L(P_w)$ と, 重み関数 (形状関数 N_α に等しくおく) との積が, 領域内のいたるところで恒等的に零となるような解を求める。すなわち,

$$\int_V L(P_n) N_\alpha(x_i) dV = 0 \quad (17)$$

$$\int_V L(P_w) N_\alpha(x_i) dV = 0 \quad (18)$$

上記の考え方は、領域内を有限個の要素に分割したとき、各要素内で成立する。よって (7), (8), (15) ~ (18) 式より、Green の第 1 定理を用いて整理すると、次に示す連立方程式が得られる。

$$A_{\alpha\beta} P_{\alpha\beta} + B_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial t} (P_{\alpha\beta} - P_{\beta\alpha}) = Q_{\alpha\alpha} - G_{\alpha\alpha} \quad (19) \quad A_{\alpha\beta} P_{\alpha\beta} + B_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial t} (P_{\alpha\beta} - P_{\beta\alpha}) = Q_{\alpha\alpha} - G_{\alpha\alpha} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} A_{\alpha\beta} &= K_{ij} \int_V \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j \left\{ \frac{\partial P}{\partial x} \right\} \frac{\partial N_i}{\partial x} dV, & A_{\alpha\beta} &= K_{ij} \int_V \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j \left\{ \frac{\partial P}{\partial x} \right\} \frac{\partial N_i}{\partial x} dV \\ B_{\alpha\beta} &= -B_{\beta\alpha} = \phi \int_V N_i N_j \{ S_w \}^0 N_i^0 dV, & & \\ Q_{\alpha\alpha} &= -\int_V N_i \phi \frac{\partial}{\partial t} dV - \phi \int_V N_i \phi \frac{\partial}{\partial t} dV, & Q_{\alpha\alpha} &= -\int_V N_i \phi \frac{\partial}{\partial t} dV - \phi \int_V N_i \phi \frac{\partial}{\partial t} dV \\ G_{\alpha\alpha} &= K_{iz} \int_V N_i N_j \left\{ \frac{\partial P}{\partial z} \right\} \frac{\partial N_i}{\partial z} dV, & G_{\alpha\alpha} &= K_{iz} \int_V N_i N_j \left\{ \frac{\partial P}{\partial z} \right\} \frac{\partial N_i}{\partial z} dV \end{aligned} \quad (21)$$

なお、上式において、 K_{ij} は、 ϕ は要素内で一定とした。また、 A_n , A_w , G_n , G_w 中の $\left\{ \frac{\partial P}{\partial x} \right\}$, $\left\{ \frac{\partial P}{\partial z} \right\}$ については、upstream weighting method を、 B_n , B_w については、対角化した、Lumped mass matrices を採用した。(19), (20) 式は、領域内のすべての要素についてたしあわすことにより、最終的に、次のようなマトリックス方程式が得られる。

$$[A] \{P\} + [B] \frac{\partial}{\partial t} \{P\} = \{Q\} - \{G\} \quad (22)$$

$$\text{ここに、} \{P\}^T = \{P_{n1}, P_{w1}, P_{n2}, P_{w2}, \dots, P_{nM}, P_{wM}\}, \{Q\}^T = \{Q_{n1}, Q_{w1}, Q_{n2}, Q_{w2}, \dots, Q_{nM}, Q_{wM}\}, \{G\}^T = \{G_{n1}, G_{w1}, G_{n2}, G_{w2}, \dots, G_{nM}, G_{wM}\} \quad (23)$$

(22) 式の時間項については、中央差分を適用し、各時間ステップ内で、次の判定条件を満足するまで反復計算を行う。

$$\begin{aligned} \max_i |P_{n,i}^{k+1} - P_{n,i}^k|, t+\Delta t - P_{n,i}^k, t+\Delta t| &\leq \Delta P_{n,max}, & \max_i |P_{w,i}^{k+1} - P_{w,i}^k|, t+\Delta t - P_{w,i}^k, t+\Delta t| &\leq \Delta P_{w,max} \\ \max_i |S_{w,i}^{k+1} - S_{w,i}^k|, t+\Delta t - S_{w,i}^k, t+\Delta t| &\leq \Delta S_{w,max} \end{aligned} \quad (24)$$

4. Buckley - Leverette 問題の解析例 本解析手法により求められる解の精度について検証するために、特性曲線法による、Buckley - Leverette の解との比較を行う。Buckley - Leverette の解は、毛管圧が 0 の特殊な場合における、非圧縮性、非混合性二相流体の一次元的置換の解であり、wetting front で飽和度が不連続に変化する特性を有している。解析条件としては、Todd²⁾ が示したデータを用いた (Table 1, Fig. 1)。Fig. 2 に本手法および理論解により求めた、 $t=1500$ day における飽和度分布を示す。一般に、二相流解析では、 k_{rn} , k_{rw} および P_c の強い非線形性に起因する収束性の問題があるが、upstream weighting method, および Lumped mass matrices の採用により、本例題の解は、良好な収束性を示し、解の振動もみられなかった。飽和度分布について理論解と比較すると、本手法による解は、特に分割幅が粗い場合に、front 形状にかなりの誤差を含むが、分割を細くする事により、良い一致をみた。front 付近を除く飽和度分布については、両ケースとも、理論解と良い一致をみた。

5. おわりに 本論文では、有限要素法の二相流問題への適用性について示した。今後は、さらに多次元の問題への手法の拡張を行うとともに、流体の圧縮性、混合性を考慮した解析を進める予定である。

参考文献 A. Settari and K. Aziz Treatment of nonlinear terms in the numerical solution of partial differential equations for multiphase flow in porous media Int. J. Multiphase Flow, Vol. 1, pp. 817-844, 1975., ²⁾ M. R. Todd Methods for Increased Accuracy in Numerical Reservoir Simulators S. P. E. J. pp. 515-530, 1972

Table 1 解析条件

$L=304.8$ m
 $A=929.03$ m²
 $\mu_n=\mu_w=1.157 \times 10^{-3}$ Pa·day
 $K=2.961 \times 10^{-13}$ m²
 $\phi=0.2$
 $P_c=0.0$ (≤ 15 pa)
 初期条件
 $S_o=0.16$ ($0 < x < L$)
 境界条件
 $Q_w|_{x=0}=12.07$ m³/day (注入)
 $Q_n|_{x=L}=12.07$ m³/day (抽出)
 $P_w|_{x=L}=0.0$ Pa

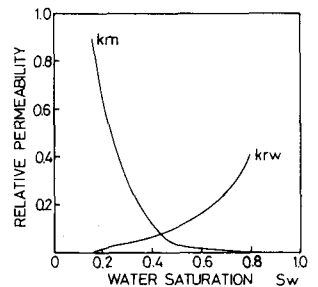


Fig-1 RELATIVE PERMEABILITY AND WATER SATURATION CURVES FOR THE BUCKLEY LEVERETTE PROBLEM. (From Todd)

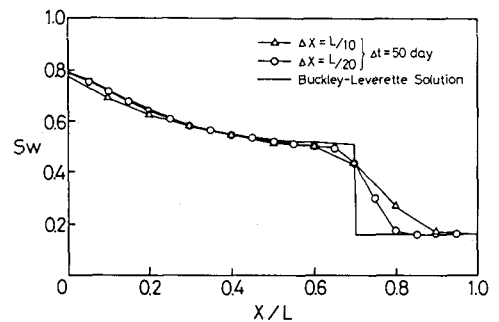


Fig-2 BUCKLEY - LEVERETTE PROBLEM ($t=1500$ day)