

東海大学 正員 宇都一馬 冬木 衛 桜井 学

1. まえがき

筆者らは、① 杭や地盤の載荷試験から得られる荷重-変位曲線、② 標準貫入試験から得られる打撃回数-累計貫入量曲線、③ 構造物や盛土などの沈下量-時間曲線を定量的に表現するための数学モデルを設定し、これに実測値をあてはめて得られた回帰係数をもとに、これらの曲線と評価する手法を提案している。^{1)~6)} これらの数学モデルは非線形形であるため、回帰係数を求める場合に繰返し計算を行うことになり、計算式の展開や計算方法などの工夫によって、演算時間に大きな違いが生ずる。①、②の曲線の数学モデル $y = a(1 - e^{-\frac{x}{b}})$ の計算方法については、すでに文献7)で述べた。

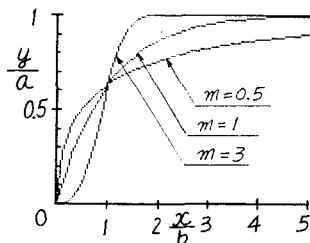


図-1 Weibull分布曲線

今回の報告は、上式をさらに一般化した数学モデル $y = a\{1 - e^{-(\frac{x}{b})^m}\}$ および③の曲線の数学モデル $y = ae^{-(\frac{x}{b})^m}$ の3つの回帰係数 m, a, b の計算方法について、その概要を述べたものである。

2. プログラム作成のための式の展開とその解法

①、②および③の曲線の一般化した数学モデルは、それぞれ(1)式、(2)式で示される。(1)式は、統計学で扱うWeibull分布曲線($m=1$ のとき指数分布)、(2)式はCauchy分布曲線に対応する。

$$y = a\{1 - e^{-(\frac{x}{b})^m}\} \quad m > 0 \quad (1)$$

$$y = ae^{-(\frac{x}{b})^m} \quad m < 0 \quad (2)$$

ここに、 m は仕任意の値で、 a, b は正の係数である。

(1)式の x を b で、 y を a で割って正規化し、 m をパラメータとして示したものが図-1であり、 m の値によって変化に富んだ曲線が描かれることがわかる。

以下に、回帰係数を求めるため、式の展開をして行くわけであるが、(1)式、(2)式とも同じ操作をすればよく、(1)式を中心に述べ、(2)式については特に重要な式のみを列挙する。

(1)式の回帰モデルを(3)式とする。

$$y = a\{1 - e^{-(\frac{x}{b})^m}\} + \varepsilon \quad \varepsilon: \text{誤差項} \quad (3)$$

(3)式に n 組の測定値をあてはめて整理すると、残差平方和 S は(4)式となる。

$$S = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n \{y_i - a\{1 - e^{-(\frac{x_i}{b})^m}\}\}^2 \quad (4)$$

(4)式の残差平方和 S が最小となるように、非線形最小2乗法⁸⁾で回帰係数 a, b を決定するわけである。そこで、 S を a および b で微分し、その結果を0に等しいとおき、整理すると、それぞれ(5)式、(6)式なる正規方程式が得られる。

$$\frac{\partial S}{\partial a} = \sum_{i=1}^n \{y_i - a\{1 - e^{-(\frac{x_i}{b})^m}\}\} \{1 - e^{-(\frac{x_i}{b})^m}\} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = \sum_{i=1}^n \{y_i - a\{1 - e^{-(\frac{x_i}{b})^m}\}\} x_i^m e^{-(\frac{x_i}{b})^m} = 0 \quad (6)$$

(5)式、(6)式の a をそれぞれ a_1, a_2 とすれば(7)式、(8)式を得る。

$$a_1 = F_2 / F_1 \quad (7), \quad a_2 = F_4 / F_3 \quad (8)$$

$$\text{ここに、} F_1 = \sum_{i=1}^n \{1 - e^{-(\frac{x_i}{b})^m}\}^2, F_2 = \sum_{i=1}^n y_i \{1 - e^{-(\frac{x_i}{b})^m}\} \\ F_3 = -\sum_{i=1}^n x_i^m e^{-(\frac{x_i}{b})^m} \{1 - e^{-(\frac{x_i}{b})^m}\}, F_4 = -\sum_{i=1}^n x_i^m y_i e^{-(\frac{x_i}{b})^m}$$

b を決定するには、 $f(b) = a_1 - a_2 = 0$ とおいた(9)式を解けばよい。

$$f(b) = a_1 - a_2 = F_2 / F_1 - F_4 / F_3 = 0 \quad (9)$$

(9)式で、 $m=1$ としたときの b の決定方法については、筆者らが現在使用している「一樣検索法」、⁹⁾「Newton-Raphson法」の2種類についてすでに文献7)で述べた。Newton-Raphson法を用いる場合には、(9)式を b で微分した(10)式が必要となる。

$$f'(b) = \frac{m}{b^{m+1}} \left(\frac{F_4 F_1 - 2 F_2 F_3}{F_1^2} - \frac{F_5 F_3 - F_4 F_6}{F_3^2} \right) \quad (10)$$

$$\text{ここに、} F_5 = \sum_{i=1}^n (x_i^m)^2 y_i e^{-(\frac{x_i}{b})^m}, F_6 = \sum_{i=1}^n (x_i^m)^2 e^{-(\frac{x_i}{b})^m} \{1 - 2e^{-(\frac{x_i}{b})^m}\}$$

(9)式、(10)式を用いて、Newton-Raphson法の反復関数(11)式を得る。

$$b_{i+1} = b_i - f(b_i) / f'(b_i) \quad (11)$$

(11)式を利用して、 b の相対精度 $|b_{i+1} - b_i| / |b_i|$ が収束条件以下となるまで繰返し計算を行なえばよい。

b が決定されれば、(7)式あるいは(8)式から a を

求めることができる。以上の方法で、任意の m について b , a が求まる。次に、 m の収束条件を与えて、 m を変化させながら S を最小にするような m を決定すればよい。これらの全体の流れを示したものが図-2 のフローチャートであり、任意の m に対する b , a の決定の部分をサブルーチンとして用いている。すなわち、測定値の組数 n , 測定値 (x_i, y_i) , m の初期値 m_0 , きざみ Δm , 収束条件 m EPS, b の初期値 b_0 , 収束条件 b EPS を入力し、 m を変化させながら、(4)

式の S の大小関係により、順次 Δm を小さくし、収束条件を満たすような m , a , b を決定すればよい。

(2) 式についても、以上の方法を用いれば (8) 式、(9) 式は同じ表現となり、(10) 式には (10') 式が対応する。

$$f(b) = \frac{m}{b^{m+1}} \left(\frac{F_4 F_1 - 2 F_2 F_3}{F_1^2} - \frac{F_5 F_3 - 2 F_4 F_6}{F_3^2} \right) \quad (10')$$

$$\begin{aligned} F_1 &= \sum_{i=1}^n e^{-\left(\frac{x_i}{b}\right)^m}, & F_2 &= \sum_{i=1}^n y_i e^{-\left(\frac{x_i}{b}\right)^m} \\ F_3 &= \sum_{i=1}^n x_i^m e^{-\left(\frac{x_i}{b}\right)^m}, & F_4 &= \sum_{i=1}^n x_i^m y_i e^{-\left(\frac{x_i}{b}\right)^m} \\ F_5 &= \sum_{i=1}^n (x_i^m)^2 y_i e^{-\left(\frac{x_i}{b}\right)^m}, & F_6 &= \sum_{i=1}^n (x_i^m)^2 e^{-\left(\frac{x_i}{b}\right)^m} \end{aligned}$$

3. 計算例

3.1 Weibull 分布曲線 (1) 式

図-3 中の表に示したデータ (文献7) の解析例) を用い、 $m_0=1$, $\Delta m=-0.1$, m EPS=0.01, $b_0=1$, b EPS= 1×10^{-6} として計算した結果、 $m=0.76$, $a=655.777$, $b=3.26165$, $S=2537.36$ となった。

$m=1$ では、 $a=603.267$, $b=2.62033$, $S=4368.71$ であり、 $m=0.76$ のときの残差平方和 S はかなり小さくなっている。

使用データを黒丸でプロットし、計算結果を描いたものが図-3である。

3.2 Cauchy 分布曲線 (2) 式

図-4 中の表に示したデータ (文献6) 図-4(b)) を用い、 $m_0=-1$, $\Delta m=0.1$, m EPS=0.001, $b_0=1$, b EPS= 1×10^{-6} として計算した結果、 $m=-0.739$, $a=25.4942$, $b=4.78078$, $S=0.777684$ となった。

使用データをプロットし、計算結果を描いたものが図-4である。

4. まとめ

まえがきで述べた①、②、③の曲線を定量的に表現するため、(1) 式および (2) 式の数学モデルを設定し、これに実測値をあてはめて得られた回帰係数をもとに、曲線の評価する手法を提案しているわけであるが、土質基礎工学で取扱う現象にはこの他に似たような現象がいくつかあり、それらにもこの手法を適用できるものと思われる。数学モデルが非線形となるが、本文のような式の展開、計算方法を工夫したことによって、マイコンはもちろんのことポケットコンピュータと呼ばれる小型の計算機でも容易に回帰係数を決定できる。

参考文献 1) 宇都・冬木・近藤・桜井；ワイの載荷試験結果の一整理方法，第13回土質工学研究発表会，1978。 2) 塩井・宇都・冬木・近藤・桜井；杭の荷重-変位曲線の非線形回帰結果による支持力の一評価法，第23回土質工学シンポジウム，1978。 3) 塩井・光家・宇都・冬木・桜井；杭の水平載荷試験での降伏点の評価法，杭の水平載荷試験に関するシンポジウム，土質学会，1979。 4) 窪田・宇都・冬木・桜井；ニューマチックケソン内における平板載荷試験，平板載荷試験に関するシンポジウム，土質学会，1979。 5) 宇都・冬木・近藤・石塚；標準貫入試験に関する基礎的研究(3)，第13回土質工学研究発表会，1978。 6) 石原・小野・有木・宇都・冬木・桜井；アプロチクッション式橋台の長期沈下予測，第24回土質工学シンポジウム，1979。 7) 宇都・冬木・桜井；載荷試験から得られる荷重-変位曲線の非線形回帰計算について(その1)，土木学会第7回関東支部年次研究発表会，1980。 8) N.R.Draper・H.Smith(中村慶一訳)；応用回帰分析，森北出版K.K.，1973。

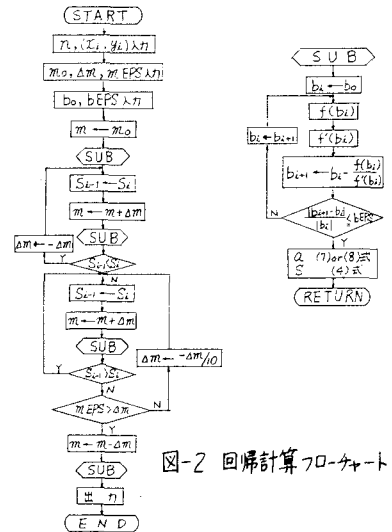


図-2 回帰計算フローチャート

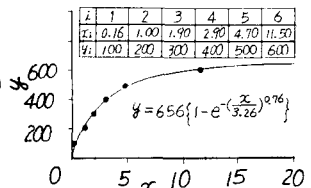


図-3 Weibull 分布曲線の計算例

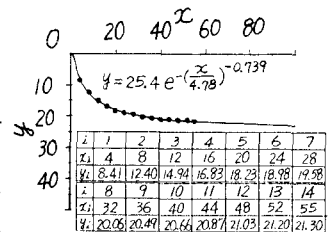


図-4 Cauchy 分布曲線の計算例