

(株)熊谷組 正会員 松尾 勉

大塚 本夫

上野 正高

1. はじめに

NATMにおける内空変位測定の結果を有効に活用する目的でトンネル周辺の応力及び変位の計算方法論について別論文で述べた。この論文では、もう少し具体的に計算する方法について考察する。実際面での活用方法は紙面の関係上別の機会を発表する予定である。

2. トンネルの形状

種々のトンネル形状に対しての一般式として(1)式を考える。

$$w(z) = z + az = z + b\frac{1}{z} + c\frac{1}{z^2} + d\frac{1}{z^3} + e\frac{1}{z^4} \quad (1)$$

(1)式での z -平面上で示される座標は次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} x &= (1+b)\cos\theta + c\cos 2\theta + d\cos 3\theta + e\cos 4\theta \\ y &= (1-b)\sin\theta - c\sin 2\theta - d\sin 3\theta - e\sin 4\theta \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

(2)式にて、 $b \sim e$ の係数を定めることにより種々のトンネル形状が考察される。 $b=c=d=e=0$ の場合は、円形トンネルの形状になる。

3. 応力関数の計算

トンネル周辺に一定応力分布状態に作用しているところにトンネルを掘削する。 $z=\infty$ では一定応力状態を満足する応力関数として次式を考える。

$$\left. \begin{aligned} \varphi(z) &= Az \\ \psi(z) &= Bz^2 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

z 面ぞ(3)式を考えると $z=\infty$ と $z=0$ は対応するので、

(3)式は $z=0$ で一定応力になる場合は

$$\left. \begin{aligned} \varphi(z) &= Az, \quad \varphi'(z) = A \\ \psi(z) &= Bz^2, \quad \psi'(z) = 2Bz \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

自由ベリの条件として次式が満足されなければならない。

$$\overline{\varphi(z)} + \{z\varphi'(z) + \psi(z)\} = 0 \quad (5)$$

補助関数 $\chi(z)$ を用いると(5)式は

$$\chi(z) = \overline{z}\varphi'(z) + \psi(z) \quad (6)$$

(6)式に(3)及び(4)式の関係を代入すると、

$$\chi(z) = \left(\frac{1}{z} + b\right) + c\frac{1}{z^2} + d\frac{1}{z^3} + e\frac{1}{z^4} A + 2Bz \quad (7)$$

ただしトンネル壁面上では、 $z\overline{z}=1$ の関係が成立しなければならないことを考慮する。

$z=\infty$ では(7)式は

$$\chi(z) = (bz + c\frac{1}{z} + d\frac{1}{z^2} + e\frac{1}{z^3})A + 2Bz \quad (8)$$

トンネル壁面では

$$\left. \begin{aligned} \varphi(z) &= -\overline{\chi(z)} = -(b\frac{1}{z} + c\frac{1}{z^2} + d\frac{1}{z^3} + e\frac{1}{z^4})A - 2B\frac{1}{z} \\ \text{また, } \chi(z) &= -\overline{\varphi(z)} = -A\frac{1}{z} \end{aligned} \right\} \quad (10) \quad (9)$$

したがって、応力関数 $\varphi(z)$ 及び補助関数 $\chi(z)$ はそれぞれ(11)及び(12)式として求められる。

$$\varphi(z) = Az - (b\frac{1}{z} + c\frac{1}{z^2} + d\frac{1}{z^3} + e\frac{1}{z^4})A - 2B\frac{1}{z} \quad (11)$$

$$\chi(z) = (bz + c\frac{1}{z} + d\frac{1}{z^2} + e\frac{1}{z^3})A + 2Bz - A\frac{1}{z} \quad (12)$$

(11)及び(12)式より $\psi'(z)$ は

$$\begin{aligned} \psi'(z) &= \chi(z) - \overline{z}\varphi'(z) \cdot \varphi'(z) \\ &= (bz + c\frac{1}{z} + d\frac{1}{z^2} + e\frac{1}{z^3})A + 2Bz - A\frac{1}{z} - (\frac{1}{z} + b\frac{1}{z} + c\frac{1}{z^2} + d\frac{1}{z^3} + e\frac{1}{z^4})A + 2B\frac{1}{z} \\ &\quad + 4e\frac{1}{z^5}A + 2B\frac{1}{z^2} \end{aligned} \quad (13)$$

ここで、係数 A 及び B は無限遠の条件から求められ、

$$A = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{4}, \quad B = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} + i\tau_{xy} \right)$$

となる。一般の場合は $\sigma_y = P_v$, $\sigma_x = P_h = \lambda P_v$ として用いるが、座標上の問題で $\sigma_x = P_v$, $\sigma_y = P_h = \lambda P_v$ として用いることにすると(11)式は(14)式となる。

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= (1+\lambda)P_v z - (1+\lambda)P_v \left(b\frac{1}{z} + c\frac{1}{z^2} + d\frac{1}{z^3} + e\frac{1}{z^4} \right) \\ &\quad + (1-\lambda)P_v \frac{1}{z} \end{aligned} \quad (14)$$

(その1)で示した応力関数は(14)式の才1項目を省いたもので計算では後で加算される。(x軸が垂直で、y軸が水平になっていることに注意)

4. トンネル周辺応力($r=a$ トンネル壁面)

$$\sigma_\theta + \sigma_r = 4 \left(\frac{\varphi'(z)}{1+z^2} + \frac{\overline{\varphi'(z)}}{1+\overline{z}^2} \right) \quad (15)$$

$r=a$ では、 $\sigma_r=0$, $\tau_{r\theta}=0$ になるので応力は非常に簡単になる。

(14)式を用いて、各項ごとに計算する。

$$\text{第1項は, } A_1 = (1+\lambda)P_v \quad (16)$$

$$\text{第2項は, } A_2 = -(1+\lambda)P_v \left[\frac{b}{1+z^2} + \frac{\overline{b}}{1+\overline{z}^2} \right] \quad (17)$$

$$\text{第3項は, } A_3 = (1-\lambda)P_v \left[\frac{1}{z^2(1+z^2)} + \frac{1}{\overline{z}^2(1+\overline{z}^2)} \right] \quad (18)$$

$$\begin{aligned}\Delta'z &= -b\frac{1}{3} - 2C\frac{1}{3} - 3d\frac{1}{3} - 4e\frac{1}{3} \\ &= -(be^{-2i\theta} + 2Ce^{-3i\theta} + 3de^{-4i\theta} + 4ee^{-5i\theta}) \\ &= -\{b(\cos 2\theta - i\sin 2\theta) + 2C(\cos 3\theta - i\sin 3\theta) + 3d(\cos 4\theta - i\sin 4\theta) + 4e(\cos 5\theta - i\sin 5\theta)\} \quad (19)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta'z &= -(be^{2i\theta} + 2Ce^{3i\theta} + 3de^{4i\theta} + 4ee^{5i\theta}) \\ &= -\{b(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) + 2C(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) + 3d(\cos 4\theta + i\sin 4\theta) + 4e(\cos 5\theta + i\sin 5\theta)\} \quad (20)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A_2 &= -2(1+\lambda)P_v \frac{(b\sin 2\theta + 2C\sin 3\theta + 3d\sin 4\theta + 4e\sin 5\theta)^2 - (b\cos 2\theta - 2C\cos 3\theta - 3d\cos 4\theta - 4e\cos 5\theta)^2}{(1-b\cos 2\theta - 2C\cos 3\theta - 3d\cos 4\theta - 4e\cos 5\theta)^2} \\ &\quad + \frac{2C\cos 3\theta + 3d\cos 4\theta + 4e\cos 5\theta}{(b\sin 2\theta + 2C\sin 3\theta + 3d\sin 4\theta + 4e\sin 5\theta)^2} \\ &\quad - \frac{3d\cos 4\theta - 4e\cos 5\theta}{(b\sin 2\theta + 2C\sin 3\theta + 3d\sin 4\theta + 4e\sin 5\theta)^2} \quad (21)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A_3 &= -2(1-\lambda)P_v \frac{\cos 2\theta - b - 2C\cos 3\theta - 3d\cos 4\theta - 4e\cos 5\theta}{(\cos 2\theta - b - 2C\cos 3\theta - 3d\cos 4\theta - 4e\cos 5\theta)^2} \\ &\quad + \frac{(\sin 2\theta + 2C\sin 3\theta + 3d\sin 4\theta + 4e\sin 5\theta)^2}{(\cos 2\theta - b - 2C\cos 3\theta - 3d\cos 4\theta - 4e\cos 5\theta)^2} \quad (22)\end{aligned}$$

$$\sigma_\theta = A_1 + A_2 + A_3 \quad (23)$$

5. トンネル周辺の変位

この場合もトンネル壁面にのみにかざると非常に簡単になり次式で求められる。

$$\begin{aligned}U_r + iV_\theta &= \frac{P_v a}{4G} \sqrt{\frac{w'}{w'}} \left\{ (1+\lambda) \left[1 - \frac{2}{\lambda} e^{-i\theta} \Delta'z \right] \right. \\ &\quad \left. - (1-\lambda) \left[e^{-i\theta} \Delta'z - \frac{2}{\lambda} e^{-2i\theta} \right] \right\} \quad (24)\end{aligned}$$

(24)式において、

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{w'}{w'}} &= \frac{(1-b\cos 2\theta - 2C\cos 3\theta - 3d\cos 4\theta - 4e\cos 5\theta)}{\sqrt{(1-b\cos 2\theta - 2C\cos 3\theta - 3d\cos 4\theta - 4e\cos 5\theta)^2}} \\ &\quad - \frac{i(b\sin 2\theta + 2C\sin 3\theta + 3d\sin 4\theta + 4e\sin 5\theta)}{(b\sin 2\theta + 2C\sin 3\theta + 3d\sin 4\theta + 4e\sin 5\theta)^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}e^{-i\theta} \Delta'z &= (b\cos 2\theta + C\cos 3\theta + d\cos 4\theta + e\cos 5\theta) \\ &\quad - i(b\sin 2\theta + C\sin 3\theta + d\sin 4\theta + e\sin 5\theta)\end{aligned}$$

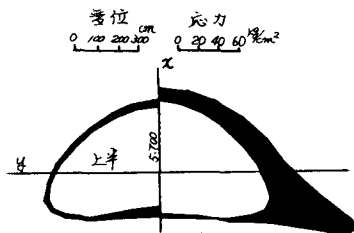
$$\begin{aligned}e^{-i\theta} \Delta'z &= (b + C\cos \theta + d\cos 2\theta + e\cos 3\theta) \\ &\quad + i(C\sin \theta + d\sin 2\theta + e\sin 3\theta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}U_r &= \frac{P_v a}{4G} \frac{1}{\sqrt{(1-b\cos 2\theta - 2C\cos 3\theta - 3d\cos 4\theta - 4e\cos 5\theta)^2}} \\ &\quad + \frac{(b\sin 2\theta + 2C\sin 3\theta + 3d\sin 4\theta + 4e\sin 5\theta)^2}{(1-b\cos 2\theta - 2C\cos 3\theta - 3d\cos 4\theta - 4e\cos 5\theta)^2} \\ &\quad \times \left\{ (1+\lambda) \left[(1-b\cos 2\theta - 2C\cos 3\theta - 3d\cos 4\theta - 4e\cos 5\theta) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{2}{\lambda} (1-b\cos 2\theta - 2C\cos 3\theta - 3d\cos 4\theta - 4e\cos 5\theta)(b\cos 2\theta \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + C\cos 3\theta + d\cos 4\theta + e\cos 5\theta) \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{\lambda} (1-b\cos 2\theta - 2C\cos 3\theta - 3d\cos 4\theta - 4e\cos 5\theta)(b\cos 2\theta \right. \\ &\quad \left. + C\cos 3\theta + d\cos 4\theta + e\cos 5\theta) \right\} \quad (25)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&+ \cos 3\theta + d\cos 4\theta + e\cos 5\theta) - (b\sin 2\theta + 2C\sin 3\theta + 3d\sin 4\theta + 4e\sin 5\theta)(b\sin 2\theta + C\sin 3\theta + d\sin 4\theta + e\sin 5\theta)) \\ &- (1-\lambda) \left\{ (1-b\cos 2\theta - 2C\cos 3\theta - 3d\cos 4\theta - 4e\cos 5\theta)(b + C\cos \theta \right. \\ &+ d\cos 2\theta + e\cos 3\theta) + (b\sin 2\theta + 2C\sin 3\theta + 3d\sin 4\theta + 4e\sin 5\theta) \\ &\times (C\sin \theta + d\sin 2\theta + e\sin 3\theta) - \frac{2}{\lambda} \left\{ (1-b\cos 2\theta - 2C\cos 3\theta \right. \\ &- 3d\cos 4\theta - 4e\cos 5\theta)\cos 2\theta - (b\sin 2\theta + 2C\sin 3\theta + 3d\sin 4\theta + 4e\sin 5\theta)\sin 2\theta \right\} \left. \right\} \quad (25)\end{aligned}$$

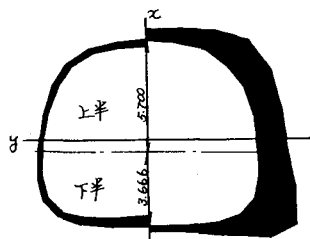
$$V_\theta = -\frac{P_v a}{4G} \frac{1}{\sqrt{(1-b\cos 2\theta - 2C\cos 3\theta - 3d\cos 4\theta - 4e\cos 5\theta)^2}} + \frac{(b\sin 2\theta + 2C\sin 3\theta + 3d\sin 4\theta + 4e\sin 5\theta)^2}{(1-b\cos 2\theta - 2C\cos 3\theta - 3d\cos 4\theta - 4e\cos 5\theta)^2}$$

$$\begin{aligned}&\times \left\{ (1+\lambda) \left\{ (b\sin 2\theta + 2C\sin 3\theta + 3d\sin 4\theta + 4e\sin 5\theta) - \frac{2}{\lambda} \right. \right. \\ &\left. \left. (1-b\cos 2\theta - 2C\cos 3\theta - 3d\cos 4\theta - 4e\cos 5\theta)(b\sin 2\theta \right. \right. \\ &+ C\sin 3\theta + d\sin 4\theta + e\sin 5\theta) \left. \right\} \\ &+ (1-\lambda) \left\{ (1-b\cos 2\theta - 2C\cos 3\theta - 3d\cos 4\theta - 4e\cos 5\theta)(C\sin \theta \right. \\ &+ d\sin 2\theta + e\sin 3\theta) - (b\sin 2\theta + 2C\sin 3\theta + 3d\sin 4\theta + 4e\sin 5\theta) \\ &\times (b + C\cos \theta + d\cos 2\theta + e\cos 3\theta) - \frac{2}{\lambda} \left\{ (1-b\cos 2\theta - 2C\cos 3\theta \right. \\ &- 3d\cos 4\theta - 4e\cos 5\theta)\sin 2\theta - (b\sin 2\theta + 2C\sin 3\theta + 3d\sin 4\theta \\ &+ 4e\sin 5\theta)\cos 2\theta \right\} \left. \right\} \quad (26)\end{aligned}$$



(a) 上半掘削時

$a=422\text{cm}$ $b=-0.3$ $C=0.15$ $d=-0.025$ $e=0$
 $P_v=16\text{kg/cm}^2$ $G=120\text{kg/cm}^2$ $\lambda=0.666$ $\nu=0.4$ $\alpha=1.4$



(b) 下半掘削時

$a=541\text{cm}$ $b=-0.075$ $C=0.06$ $e=0$

$P_v=16\text{kg/cm}^2$ $G=120\text{kg/cm}^2$ $\lambda=0.666$ $\nu=0.4$ $\alpha=1.4$

Fig-1. 上半及び下半掘削時の変位及び応力分布

6. 結論

詳細の可変変位の評価法については、紙面の都合上、次回に発表したい。